КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ'81
София, 1983, с. 171—177

CONSTRUCTIVE FUNCTION THEORY'81
Sofia, 1983, p. 171—177

МЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МОДУЛЯ НЕПРЕРЫВНОСТИ И ИНТЕРПОЛЯЦИЯ СПЛАЙНАМИ НА ТРЕУГОЛЬНЫХ СЕТКАХ

Г. А. Тотков, М. С. Базелков

Резюме. Пусть T — треугольник с вершинами в точках P_1, P_3, P_5, площадью Δ, а P_2, P_4 и P_6 — середины сторон T. Для любой точки $P\in T$ через Δ_1, Δ_2 и Δ_3 обозначим соответственно площади треугольников PP_3P_5, PP_1P_5 и PP_1P_3, а через $\delta_i=\rho(P, P_i)$, $i=1, 3, 5$ — евклидовые расстояния от т. P до т. P_i. Число d_T определим ($K(O, R)$ — описанную для T окружность) с

$$d_T=\begin{cases} 2R, & \text{если} \quad O\notin T, \\ \operatorname{diam}(T), & \text{если} \quad O\in T. \end{cases}$$

Тогда для любого модуля непрерывности $\omega(\delta)$, $0\leq\delta\leq\operatorname{diam}(T)$ имеет место неравенство

$$(*)\quad \Delta_1\omega(\delta_1)+\Delta_2\,\omega(\delta_3)+\Delta_3\omega(\delta_5)<3\Delta\omega(d_T/4).$$

с неулучшаемой константой 3, а для выпуклого ω

$$(**)\quad \Delta_1\omega(\delta_1)+\Delta_2\omega(\delta_3)+\Delta_3\omega(\delta_5)\leq\Delta\omega(d_T/2).$$

Для ограниченной на T функции $f(X)$, $X(x, y)\in T$, пусть $L_1(f, T; X)=ax+by+c$ — интерполянт, для которого $L_1(f, T; P_i)=f(P_i)$, $i=1, 3, 5$, а $L_2(f, T; X)=ax^2+by^2+cxy+dx+cy+g$ — интерполянт с $L_2(f, T; P_i)=f(P_i)$, $i=1, 2, \dots, 6$.

Используя неравенства $(*)$ и $(**)$, получаем точные (относительно констант) оценки величин $\| L_i(f, T; \cdot)-f(\cdot)\|_{C(T)}$, $i=1, 2$, в терминах первого модуля непрерывности функции f на T и второго — на контуре треугольника T.

1. Обозначения и формулировка результатов. Пусть Ω — ограниченная область в R^2, которую можно триангулировать, т. е. разложить на конечное число треугольников T_i, $i=1, 2, \dots, N$:

$$\Omega=\cup\{T_i:\ i=1, 2, \dots, N\},\quad \operatorname{int}(T_i\cap T_j)=\Phi \text{ для } i\neq j.$$

Обозначим через $T(\Omega)$ совокупность всех триангуляционных разбиений области Ω. Для $\Sigma=\{T_i\}_{i=1}^N\in T(\Omega)$, пусть $P_1, P_2, \dots, P_q$ — вершины, а $Q_1, Q_2, \dots, Q_q$ — середины сторон T_i, $i=1, 2, \dots, N$; $q=3N$ (возможно $P_{i_0}\equiv P_{j_0}$).

Для любой ограниченной на Ω функции f и триангуляции $\Sigma\in T(\Omega)$ на Ω определен единственным образом интерполянт $L_i(f, \Sigma; X)$, $X(x, y)\in\Omega$, являющийся дополненным графиком [1] функции $\tilde{L}_i(f, \Sigma; X)$, $i=1, 2$, где $\tilde{L}_1(f, \Sigma; X)=a_jx+b_jy+c_j$, $\tilde{L}_2(f, \Sigma; X)=A_jx^2+B_jy^2+C_jxy+D_jx+E_jy+Q_j$, если $X(x, y)\in T_j$, $j=1, 2, \ldots, N$ и $\tilde{L}_1(f, \Sigma; P_i)=f(P_i)=\tilde{L}_2(f, \Sigma; P_i)$, $i=1, 2, \ldots, q$, $f(Q_i)=\tilde{L}_2(f, \Sigma; Q_i)$, $i=1, 2, \ldots, q$.

График $L_1(f, \Sigma; \cdot)$ в R^3 изображается кусочно-плоской поверхностью без „пробелов". В частном случае регулярной триангуляции (для $i, j=1, 2, \ldots, q$ или $P_i \bar{\in} T_j$, или P_i — крайная точка для T_j), имеем просто $\tilde{L}_i(f, \Sigma; X)=L_i(f, \Sigma; X)$, $X\in\Omega$ для $i=1, 2$ и $L_i(f, \Sigma: X)\in C(\Omega)$ (см., например, [2]).

Пусть $\omega(\delta)$, $0\leqq\delta\leqq\operatorname{diam}(\Omega)$ — произвольный модуль непрерывности, т. е. 1) $\omega(0)=0$; 2) $\omega(\delta_1)\leqq\omega(\delta_2)$ для $\delta_1\leqq\delta_2$ и 3) $\omega(\delta_1+\delta_2)\leqq\omega(\delta_1)+\omega(\delta_2)$. Обозначим через $H_\omega(\Omega)$ совокупность всех определенных на Ω функций f, для которых $\omega(f; \delta)=\sup\{|f(X)-f(X')|: \rho(X, X')\leqq\delta; X, X'\in\Omega\}\leqq\omega(\delta)$.

Для ограниченной на T функции f определим второй модуль непрерывности на контуре Γ треугольника T через

$$\omega_2^{T}(f; \delta)=\sup\{\|\Delta_h^2 f(X)\|_C: \|h\|\leqq\delta; X, X+h, X+2h\in\Gamma\},$$

где $\Delta_h^2 f(X)=f(X+2h)-2f(X+h)+f(X)$.

Точные относительно порядков оценки для равномерного отклонения $E(f, \Sigma; \Omega)_i=\sup\{|f(X)-L_i(f, \Sigma; X)|: X\in\Omega\}$ функции f от $L_i(f, \Sigma; X)$, $i=1, 2$, в терминах модуля $\omega(f, \delta)$ получены, например, в [2 и 3].

В следующих теоремах мы получим точные относительно констант оценки для $E(f, \Sigma; \Omega)_i$ $i=1, 2$. В этих теоремах участвуют следующие числа, характеризующие триангуляции $\Sigma=\{T_i\}_{i=1}^N\in T(\Omega)$:

А. Число D_Σ определено для Σ с $D_\Sigma=\max\{\operatorname{diam}(T_i): i=1, 2, \ldots, N\}$

Б. Число d_Σ определено для Σ с $d_\Sigma=\max\{d_{T_i}: 1\leqq i\leqq N\}$, где для $=1, 2, \ldots, n$ и $K(O_i, R_i)$ — описанная для T_i окружность,

$$d_{T_i}=\begin{cases} 2R_i, & \text{если } O_i\in T_i, \\ \operatorname{diam}(T_i) & \text{если } O_i\bar{\in} T_i. \end{cases}$$

Теоремы 1, 2 и 3 анонсированы в [4] без доказательств.

Теорема 1. *Для любой ограниченной на триангулируемой области Ω функции f и $\Sigma\in T(\Omega)$ имеем*

$$E(f, \Sigma; \Omega)_1\leqq\omega(f, D_\Sigma). \tag{1}$$

Неравенство (1) *точное в следующем смысле: для любых $\Sigma\in T(\Omega)$ и $\varepsilon\in(0, D_\Sigma)$ существует $f\in C(\Omega)$, для которой $E(f, \Sigma; \Omega)_1>\omega(f, D_\Sigma-\varepsilon)$.*

Теорема 2. *Для любого выпуклого модуля непрерывности $\omega(\delta)$, $0\leqq\delta\leqq\operatorname{diam}(\Omega)$ и $\Sigma\in T(\Omega)$ имеем*

$$\sup\{E(f, \Sigma; \Omega)_1: f\in H_\omega(\Omega)\}=\omega(d_\Sigma/2). \tag{2}$$

Оценка (2) — *точная, т. е. для произвольного выпуклого модуля непрерывности ω и любой $\Sigma\in T(\Omega)$ существует $f\in H_\omega(\Omega)$, для которой $E(f, \Sigma; \Omega)_1=\omega(d_\Sigma/2)$.*

Теорема 3. *Для произвольного модуля непрерывности $\omega(\delta)$, $0\leqq\delta\leqq\operatorname{diam}(\Omega)$ и любой триангуляции $\Sigma\in T(\Omega)$ имеет место неравенство*

(3) $$\sup\{E(f,\ \Sigma;\ \Omega)_1 : f \in H_\omega(\Omega)\} < 3\omega(d_\Sigma/4).$$

Неравенство (3) — *точное, т. е.*

$$\sup\{\sup\{E(f,\ \Sigma;\ \Omega)_1/\omega(f,\ d_\Sigma/4) : f \in H_\omega(\Omega)\} : \omega(\delta) \neq 0\} = 3.$$

Теорема 4. *В условиях теоремы* 1

(4) $$E(f,\ \Sigma;\ \Omega)_2 < 3\omega(f;\ d_\Sigma/8) + \omega_2^{\mathrm{T}}(f;\ d_\Sigma/2)/6$$

и константа 3 — *неулучшаемая. Для любого* $\varepsilon > 0$ *существуют треугольник* T *и функция* $f \in C(T)$, *для которых*

$$E(f,\ \Sigma;\ \Omega)_2 \geqq (3-\varepsilon)\omega(f;\ d_\Sigma/8) + \omega_2^{\mathrm{T}}(f;\ d_T/2)/6.$$

Вопрос о точности константы 1/6 остается открытым.

Теоремы 1, 2 и 3 — распространение соответствующих одномерных результатов [5, 6, 7] в R^2 можно сформулировать и доказать для произвольных симплексных разбиений Σ ограниченной области Ω в R^n ($n \geqq 2$). При этом число d_Σ определяется индуктивным образом по размерности n. Из теорем 1, 2, 3 и 4 вытекает следующее практическое соображение: для достижения заданного порядка приближения при возможно наименьшем числе треугольников $\{T_i\}_{i=1}^N$ целесообразно для триангуляции области пользоваться как можно больше равносторонними треугольниками. Действительно, из треугольников, для которых $d_T = d = \mathrm{const}$, равносторонний треугольник со стороной $(\sqrt{3}/2)d$ имеет наибольшую площадь. Например, для триангуляции $\Omega_0 = [0,\ 1] \times [0,\ 1]$ эффективнее пользоваться правильными треугольниками и некоторым числом прямоугольных треугольников (на границе), чем обычным разбиением на прямоугольные треугольники. Так, на $H_\omega(\Omega_0)$ порядок $\omega(\sqrt{2}/n)$ достижим в первом случае с $N^* \sim (8/3\sqrt{3})n^2$ треугольных элементов, а прямоугольное разбиение требует $N = 2n^2$ элементов, т. е. ($3\sqrt{3}/4 > 1{,}25$) на 25 % больше, чем N^*.

2. Доказательства сформулированных результатов. В силу локальности интерполяции сплайнами L_i, $i=1,\ 2$ достаточно доказать теоремы 1 — 4, когда $\Omega \equiv T$ и $\Sigma \equiv \{T\}$ для произвольного треугольника T с площадью Δ и вершинами в точках P_1, P_3, P_5 и середины сторон P_1P_3, P_3P_5 и P_5P_1 — в P_2, P_4, P_6.

Нетрудно установить, что для $X(x,\ y) \in T$, $P_i(x_i,\ y_i)$, $i=1,\ \ldots,\ 6$,

(5) $$f(X) - L_1(f,\ T;\ X) = \Delta^{-1}\begin{vmatrix} f(X) & 1 & x & y \\ f(P_1) & 1 & x_1 & y_1 \\ f(P_3) & 1 & x_3 & y_3 \\ f(P_5) & 1 & x_5 & y_5 \end{vmatrix},$$

(6) $$f(X) - L_2(f,\ T;\ X) = \Delta^{-1}\begin{vmatrix} f(X) & 1 & x & y & x^2 & y^2 & xy \\ f(P_1) & 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & y_1^2 & x_1y_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f(P_6) & 1 & x_6 & y_6 & y_6^2 & y_6^2 & x_6y_6 \end{vmatrix}.$$

В первом случае для некоторых $\lambda_i \geqq 0$, $i=1, 3, 5$, $\lambda_1+\lambda_3+\lambda_5=1$ имеют место $x=\lambda_1 x_1+\lambda_3 x_3+\lambda_5 x_5$, $y=\lambda_1 y_1+\lambda_3 y_3+\lambda_5 y_5$.

Несложные преобразования для (5) дают $(X \in T)$

$$f(X)-L_1(f, T; X)=\Delta^{-1}\{[f(X)-f(P_1)]\Delta_1^0+[f(X) -f(P_3)]\Delta_2^0+[f(X)-f(P_5)]\Delta_3^0\}, \tag{7}$$

где Δ_1^0 — ориентированная площадь для треугольника XP_3P_5, Δ_2^0 — для ΔP_1XP_5, Δ_3^0 — для ΔP_1P_3X.

Полагая $|\Delta_i^0|=\Delta_i$, $i=1, 2, 3$, и $\delta_{[(i+1)/2]}=\rho(X, P_i)$, $i=1, 3, 5$, из (7), получаем

$$|f(X)-L_1(f, T; X)| \leqq \sum_{i=1}^{3} \Delta^{-1} \Delta_i\, \omega(f; \delta_i). \tag{8}$$

Теорема 1 следует из (8), неравенства $\delta_i \leqq \operatorname{diam}(T)$, $i=1, 2, 3$, и равенства

$$\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3=\Delta. \tag{9}$$

В случае выпуклого модуля непрерывности ω и $f \in H_\omega(T)$ из (8) и (9) получим

$$|f(X)-L_1(f, T; X)| \leqq \sum_{i=1}^{3} \Delta^{-1} \Delta_i\, \omega(\delta_i) \leqq \omega\Big(\sum_{i=1}^{3} \Delta^{-1}\, \Delta_i\, \delta_i\Big). \tag{10}$$

Докажем

Лемма 1. *В принятых обозначениях для любой т.* $X \in T$

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\Delta_i}{\Delta}\, \delta_i \leqq d_T/2. \tag{11}$$

Тогда из (10) и (11) следует теорема 2.

Доказательство. Используя выпуклость функции $\sqrt{x}$, получим

$$\sum_{i=1}^{3} \Delta^{-1} \Delta_i\, \delta_i \leqq \Big\{\sum_{i=1}^{3} \Delta^{-1} \Delta_i\, \delta_i^2\Big\}^{1/2}.$$

Задача $S(X)=\Sigma_{i=1}^{3}\Delta^{-1}\Delta_i\,\delta_i^2 \to \max$, $X \in T$, решима методами математического анализа и имеет следующее решение: ($K(O, R)$ — описанная для T окружность, T_T — контур треугольника T):
если $O \in T$, то $S(X) \leqq S(O)=R$;
если $O \bar{\in} T$, то $S(X) \leqq \max\{S(X):\ X \in \mathrm{T}_T\}=\operatorname{diam}(T)/2$, т. е. $S(X) \leqq d_T/2$ для $X \in T$, что доказывает лемму 1.

Для доказательства теорем 3 и 4 нам понадобится следующее метрическое свойство модуля непрерывности:

Лемма 2. *В принятых обозначениях для любого модуля непрерывности* $\omega(\delta) \neq 0$ *имеет место неравенство*

$$\sum_{i=1}^{3} \Delta^{-1} \Delta_i\; \omega(\delta_i) \leqq 3\omega(d_T/4).$$

Доказательство. Рассмотрим три случая:

А. Точка $X \in X \setminus \Delta P_2P_4P_6$. Пусть, например, $X \in P_1P_2P_6$. Тогда $\delta_1 = XP_1 < d_T/2$; $\Delta_2 + \Delta_3 < \Delta/2$; $\delta_i \leq d_T$, $i=2, 3$.

Из последних неравенств и (9) следует

$$\sum_{i=1}^{3} \Delta^{-1} \Delta_i \, \omega(\delta_i) \leq \Delta^{-1} \Delta_i \, \omega(d_T/2) + 2\omega(d_T/2)\Delta^{-1}(\Delta_2+\Delta_3)$$

$$= \omega(d_T/2) + \Delta^{-1}(\Delta_2+\Delta_3)\omega(d_T/2) < (3/2)\omega(d_T/2) \leq 3\omega(d_T/4).$$

Б. Точка $X \in \Delta P_2P_4P_6$ и выполняется одна из систем неравенств $\delta_i \leq d_T/2$: а) $i=2, 3$; б) $i=1,2$; в) $i=1, 3$.

Рассмотрим например а). В этом случае $\delta_3 \leq d_T$, $\Delta_3 < \Delta/2$ и, следовательно,

$$\sum_{i=1}^{3} \Delta^{-1} \Delta_i \omega(\delta_i) \leq \Delta^{-1} \Delta_1 + \Delta_2 \, \omega(d_T/2) + 2\omega(d_T/2)\Delta^{-1}\Delta_3 = \omega(d_T/2) + \Delta^{-1}\Delta_3 \, \omega(d_T/2)$$

$$< \omega(d_T/2) + 2^{-1}\omega(d_T/2) \leq 3\omega(d_T/4).$$

Системы б) и в) рассматриваются аналогично.

В. Точка $X \in \Delta P_2P_4P_6$ и выполняется одна из систем неравенств: а) $\delta_1 \leq d_T/2 \leq \delta_2$, δ_3; б) $\delta_2 \leq d_T/2 \leq \delta_1$, δ_3 или в) $\delta_3 \leq d_T/2 \leq \delta_1$, δ_2.

Рассмотрим а), б) и в) решаются также). Тогда $\Delta_3 < \Delta/2$, $\Delta_2 < \Delta/2$ и для $\varepsilon_i = XP_i - d_T/2$, $i=2, 3$, будем иметь

(12)

$$\sum_{i=1}^{3} \Delta^{-1}\Delta_i\omega(\delta_i) \leq \Delta^{-1}\Delta_1\omega(d_T/2) + \Delta^{-1}\Delta_2[\omega(d_T/2)+\omega(\varepsilon_2)] + \Delta^{-1}\Delta_3[\omega(d_T/2)+\omega(\varepsilon_3)]$$

$$= \omega(d_T/2) + \Delta^{-1}\Delta_2\omega(\varepsilon_2) + \Delta^{-1}\Delta_3\omega(\varepsilon_3) \leq \omega(d_T/2) + \Delta^{-1}(\Delta_2+\Delta_3)\max\{\omega(\varepsilon_i) : i=2, 3\}.$$

Элементарными геометрическими рассуждениями нетрудно установить, что $\varepsilon_i < d_T/4$, $i=2, 3$. Тогда из (12) получим

$$\sum_{i=1}^{3} \Delta^{-1}\Delta_1\omega(\delta_i) < 2\omega(d_T/4) + \omega(d_T/4) = 3\omega(d_T/4),$$

что доказывает лемму 2. Заметим, что константу 3 в лемме 2 нельзя уменьшить для произвольного треугольника T и любого модуля ω на T.

Теорема 3 следует сразу из (8) и леммы 2.

Доказательство теоремы 4. Рассмотрим, например, случай, когда т. $X \in P_1P_2P_6$, и пусть Δ_1, Δ_2 и Δ_6 — площади треугольников ΔP_2P_6X, ΔP_1P_6X и ΔP_1P_2X. Заметим, что на треугольнике T, интерполянт $L_2(f, T; X)$ для которого $L_2(f; T; X) = f(P_i) \equiv f_i$, $i=1, 2, \ldots, 6$, имеет представление (не ограничивая общности, положим $\Delta=1$):

$$L_2(f, T; X) = \sum_{i=1}^{6} \lambda_i(X) f_i, \tag{13}$$

где

$$\begin{gathered} \lambda_1(X) = 4\Delta_1(1/2+2\Delta_1), \quad \lambda_2(X) = 8\Delta_2(1/2+2\Delta_1), \\ \lambda_3(X) = -8\Delta_2(1/4-\Delta_2), \quad \lambda_4(X) = 16\Delta_2\Delta_6, \\ \lambda_5/(X) = -8\Delta_6(1/4-\Delta_6), \quad \lambda_6(X) = 8\Delta_6(1/2+2\Delta_1). \end{gathered} \tag{14}$$

Из системы

$$f_1-2f_2+f_3=\Delta^2 f(P_2),\quad f_1-2f_6+f_5=\Delta^2 f(P_6),\quad f_3-2f_4+f_5=\Delta^2 f(P_4)$$

получаем

$$(15)\quad f_5=2f_6-f_1+\Delta^2 f(P_6),\quad f_4=f_2+f_6-f_1+(1/2)[\Delta^2 f(P_2)+\Delta^2 f(P_6)-\Delta^2 f(P_1)]$$

$$f_3=2f_2-f_1+\Delta^2 f(P_2).$$

Из (13), (14), (15) следует

$$(16)\quad |f(X)-L_2(f,\ T;\ X)|=|f(X)-4\Delta_1 f_1-4\Delta_2 f_2-4\Delta_6 f_6$$

$$+8\Delta_1\Delta_2\Delta^2 f(P_2)+8\Delta_1\Delta_6\Delta^2 f(P_6)+8\Delta_2\Delta_6\Delta^2 f(P_4)|$$

$$\leqq 4\Delta_1\omega(f;\ \delta_1)+4\Delta_2\omega(f;\ \delta_2)+4\Delta_6\omega(f;\ \delta_6)$$

$$+8(\Delta_1\Delta_2+\Delta_1\Delta_6+\Delta_2\Delta_6)\,\omega_2^{\mathrm{T}}(f;\ d_T/2).$$

Нетрудно установить, что

$$(17)\quad \max\{\Delta_1\Delta_2+\Delta_1\Delta_6+\Delta_2\Delta_6:\ \Delta_1+\Delta_2+\Delta_6=1/4\}=1/48.$$

Из (16), (17) и леммы 2 ($\Delta_1+\Delta_2+\Delta_6=1/4$) вытекает неравенство

$$(18)\quad |f(X)-L_2(f,\ T;\ X)|\leqq 3\omega(f;\ d_T/8)+6^{-1}\omega_2^{\mathrm{T}}(f;\ d_T/2).$$

Подобным образом доказывается (18) и для т. $X\in P_2P_3P_4\cup P_2P_4P_6\cup\Delta P_4P_5P_6$, что завершает доказательство теоремы 4.

Теперь покажем, что константу 3 в (18) нельзя уменьшить в общем случае. Действительно, пусть $\varepsilon>0$ и T — равнобедренный треугольник $P_1P_3P_5$ и $P_1P_5=P_3P_5$, $d=d_T$ и $\sphericalangle P_1P_5P_3=\frac{\pi}{2}-\eta\left(\frac{\pi}{2}>\eta>0\right)$. Определим функцию

$$\alpha(t)=\begin{cases} t/\varepsilon, & t\in[0,\ \varepsilon],\\ 1, & t\in[\varepsilon,\ d/8].\end{cases}$$

Тогда функция $\omega(\delta)=[8\delta/d]+\alpha(\delta-d/8\,[8\delta/d])$, $0\leqq\delta\leqq d$ ($[\,\cdot\,]$ — целая часть) является модулем непрерывности. Пусть т. $A\in\Delta P_1P_2P_6$ и $\rho(P_1,A)=\rho(P_3,A)=d/4+\varepsilon$, $(d/8)+\varepsilon<\rho(P_5,A)<d/4$. Определим функцию $f\in H_\omega(T)$:

1) $f(P_1)=f(P_2)=f(P_3)=0$, $f(P_4)=f(P_6)=\omega(d/8)$, $f(P_5)=2\omega(d/8)$;

2) на треугольниках $\Delta P_2P_3P_4$ и $\Delta P_6P_4P_5$ f продолжена линейно;

3) для $X\in P_iA$, $f(X)=\omega(\rho(X,\ P_i))$, $i=1,\ 2$, а для $X\in P_6A$, $f(X)=\omega(d/8)+\omega(\rho(X,\ P_6))$;

4) на ΔP_1P_2A и ΔP_1P_6A функцию f распространим как на P_1A, P_2A и P_6A, сохраняя модуль ω;

5) на четырехугольнике $P_2P_4P_6A$ график f построим, связывая т. $(P_4, f(P_4))$ и т. $(P, f(P))$ для т. $P\in P_2A\cup P_6A$.

Из этих построений легко следуют ($\delta_6=\rho(A,\ P_6)$):

А) $f\in C(T)$; Б) $\omega(f;\ \delta)\leqq\omega(\delta)$,

В) $|f(A)-L_2(f,\ T;\ A)|=3\omega\left(\frac{d}{8}\right)-\left\{1-\frac{4\delta_6}{d\cos\eta}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\eta}{2}\right)\right\}.\,\omega\left(\frac{d}{8}\right).$

Для $\eta\to 0$ и $\delta_6\to d/4$ выражение в фигурной скобке стремится к нулю. Следовательно, для некоторых $\eta>0$ и т. $A\in T$,

$$1-\frac{4\delta_6}{d\cos\eta}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\eta}{2}\right)\geqq\varepsilon,$$

$$|f(A)-L_2(f, T; A)| \geqq (3-\varepsilon)\,\omega(d/8),$$

что указывает на то, что константу 3 нельзя уменьшить на классе всех треугольников и любых модулей непрерывности. Эта конструкция доказывает и точность константы в теореме 4.

Точность теорем 1 и 3 можно установить, используя, например, конструкции из [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. Бл. Сендов. Некоторые вопросы теории приближения функций и множеств в хаусдорфовой метрике. *Успехи мат. наук*, **24**, 1969, № 5, 141—178.
2. Ж. Деклу. Метод конечных элементов. Москва, 1976.
3. Р. Варга. Функциональный анализ и теория аппроксимации в численном анализе. Москва, 1974.
4. Г. А. Тотков, М. Базелков. Об оптимальном полигональном интерполировании функций двух переменных, *Доклады БАН*, **33**, 1980, № 5.
5. Б. А. Рымаренко. О полигональном интерполировании. *Тр. ЛВМИ*, **1**, 1954, 15—18.
6. В. Н. Малоземов. Об отклонении ломаных. *В. Ленингр. унив.*, № 7, 1966, 150—153.
7. А. С. Логинов. Приближение непрерывных функций ломаными. *Мат. заметки*, **6**, 1969 № 2, 149 — 169.
8. М. С. Базелков, Г. А. Тотков. Някои точни оценки за полигонални приближения на функция на две променливи. *Тр. ВИХВП*, **28**, 1981, № 1, 213—223.

Пловдивски университет „Паисий Хилендарски"
4000 Пловдив *България*

Получено 4 июня 1981 г.