КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ'81
София, 1983, с. 178—180

CONSTRUCTIVE FUNCTION THEORY'81
Sofia, 1983, p. 178—180

АБСОЛЮТНАЯ СХОДИМОСТЬ ИНТЕГРАЛОВ ФУРЬЕ И ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ЛИНЕЙНЫМИ СРЕДНИМИ ИХ РЯДОВ ФУРЬЕ

Р. М. Тригуб

Резюме. Пусть $\mathbf{R}^m$ — m-мерное евклидово пространство $(xy=\sum_{j=1}^m x_j y_j)$, $\mathbf{T}^m=[-\pi,\pi)^m$ — m-мерный тор, $\mathscr{A}(\mathbf{R}^m)$ — алгебра функций, представимых в виде абсолютно сходящегося интеграла Фурье:

$$f(x)=\int_{\mathbf{R}^m} g(u)e^{iux}du, \quad \|f\|_{\mathscr{A}}=\int_{\mathbf{R}^m} |g(u)|\,du<\infty.$$

В статье обсуждаются следующие вопросы: 1. Определение точного порядка приближения классическими методами суммирования кратных рядов Фурье через специальные модули гладкости. 2. Конструктивные характеристики классов функций с точной константой, 3. Деление на степенную функцию в алгебре $\mathscr{A}$.

1. Порядок приближения и специальные модули гладкости. Пусть $f\in C(\mathbf{T}^m)$ и

$$c_k(f)=(2\pi)^{-m}\int_{\mathbf{T}^m} f(u)^{-iku}\,du, \quad \mathscr{P}_k f=c_k(f)e^{ikx}, \quad \sum_{k\in \mathbf{Z}^m}\mathscr{P}_k f$$

ее ряд Фурье. $\{\lambda_{n,k}\}_{k\in\mathbf{Z}^m}$ — комплекснозначная матрица при любом $n\in\mathbf{N}$. Здесь речь будет идти о неравенствах вида (ω_r — модуль гладкости, $\|\cdot\|=\|\cdot\|_{C(\mathbf{T}^m)}$):

$$\|f-\sum_{k\in\mathbf{Z}^m}\lambda_{n,k}\mathscr{P}_k f\| \asymp \omega_r(f;\ \frac{\pi}{n})$$

(знак слабой эквивалентности) с константами, не зависящими от f и n. Впервые такие двусторонние неравенства получены автором.

Гладкость функций будем измерять поведением при $h\to 0$ выражений

$$\tilde{\omega}(f;\mu;r;h)=\|\int_{\mathbf{R}^m}\dot{\Delta}^r_{hu}f(\cdot)d\mu(u)\|,$$

где $h>0$, $r\in\mathbf{N}$, μ — конечная борелевская мера на $\mathbf{R}^m$, а $\dot{\Delta}^r=\dot{\Delta}(\dot{\Delta}^{r-1})$, $\dot{\Delta}_\delta f(x)=f(x+\delta)-f(x-\delta)$, $\delta\in\mathbf{R}^m$. Дело в том, что обычные модули в кратном случае ($m>1$) для указанной цели не подходят (см. [1, теорема

8]), хотя при $m=1$ $\omega_r(f;\,h)=\sup\{\|\Sigma_{\nu=0}^r\binom{r}{\nu}(-1)^\nu f(\cdot+\nu\delta)\|:0<\delta\leq h\}$ $\asymp\|\int_0^1\Sigma_{\nu=0}^r\binom{r}{\nu}(-1)^\nu f(\cdot+\nu hu)du\|$ (см. [2, теорема 3. 4. 2]). Приведем типичный результат (для сферических средних Рисса).

Теорема 1. *При любых* $\alpha>0$, $\beta>(m-1)/2$ *и* $r\in\mathbf{N}$ *и таком, что* $2r>m-1+\alpha$, *для всех* f *и* n $\|f-\Sigma_{|k|\leqq n}(1-n^{-\alpha}|k|^\alpha)^\beta\mathscr{P}_k f\|\asymp\|\int_{|u|\geqq 1}\cdot|u|^{-m-\alpha}\dot{\Delta}_{u/n}^{2r}f(\cdot)\,du\|$.

Этот и другие подобные результаты (для средних Марцинкевича точный порядок приближения найден О. И. Кузнецовой) приведены в [3]. Кроме того, в [3] приведено определение модуля гладкости $\tilde{\omega}_\alpha(f;\,h)$ (дробного порядка α), такого, что $\tilde{\omega}_\alpha(f,\,h)=O(h^\alpha)\Leftrightarrow f^{(\alpha)}\in L_\infty(\mathbf{T})$. Отметим еще, что если в условиях теоремы 1 α — целое и четное, то справа в определении модуля можно обойтись финитной мерой [1, теорема 9].

2. Конструктивные характеристики классов функций с точной константой. При доказательстве теорем типа 1 (оценки погрешности приближения сверху и снизу) устанавливается принадлежность некоторых функций алгебре $\mathscr{A}(\mathbf{R}^m)$, и сами эти константы в неравенствах — это нормы в $\mathscr{A}(\mathbf{R}^m)$. В общем случае — нормы в $B(\mathbf{R}^m)$, где

$$B(\mathbf{R}^m)=\{f: f(x)=\int\limits_{\mathbf{R}^m}e^{ixu}\,d\mu(u),\ \|f\|_B=\inf\operatorname{var}\mu<\infty\}.$$

Если еще мера μ положительна, будем писать $B^+(\mathbf{R}^m)(\|f\|_{B^+}=f(0))$. При $m=1$ эта алгебра изучается в [4].

Теорема 2. *Пусть функция* φ *с множества* $|x|\geqq n\geqq c>0$ *допускает продолжение* φ_n *на* $\mathbf{R}^m$ *такое, что* $1/\varphi_n\in B^+(\mathbf{R}^m)$ *и* $\lim_{n\to\infty}|\varphi_n(k)|/\varphi_n(0)=1(k\in\mathbf{Z}^m)$. *Тогда*

$$\|\Sigma\,\varphi(k)\mathscr{P}_k f\|_\infty\leqq 1\Leftrightarrow\|f-\sum_{|k|\leqq n}(1-(\varphi(k)/\varphi_n(k)))\mathscr{P}_k f\|\leqq(\varphi_n(0))^{-1}(n\geqq c)$$

(*слева — ряд Фурье некоторой функции из* $L_\infty(\mathbf{T}^m)$).

Пример 1. $\varphi(x)=|x|^\alpha$, $m=1$. Можно положить $\varphi_n(k)=n^{\alpha+1}(((\alpha+1)n-\alpha|k|)^{-1})(|k|\leqq n)$. При четном α получаем конструктивную характеристику класса функций с ограниченной единицей производной порядка α. Здесь возникает интересная задача о возможности продложения функции с внешности шара на все пространство, при котором продолженная функция входит в B^+ (да еще с наименьшей нормой).

Пример 2. При любом $m\geqq 1$ и $\alpha\in(0,\,2]$

$$\|\Sigma\,|k|^\alpha\mathscr{P}_k f\|_\infty\leqq 1\Leftrightarrow\|f-\Sigma\,e^{-|k|^\alpha n^{-\alpha}}\mathscr{P}_k f\|\leqq n^{-\alpha}\quad(n\geqq 1).$$

Принадлежность B^+, а не B, существенна. Пусть еще $\|\{\lambda_k\}_M=\sup\{\|\Sigma\lambda_k\mathscr{P}_k f\|:\|f\|\leqq 1\}$, если $\{\lambda_k\}_{K\in\mathbf{Z}^m}$ — мультипликатор из C в $C(\mathbf{T}^m)$.

Лемма 1.

А. $\|\{\lambda_k\}_M\leqq\lambda_0\Leftrightarrow\lambda_k=\varphi(k),\ \varphi\in B^+(\mathbf{R}^m)$;

Б. $\|\varphi\|_B\leqq\varphi(0)\Leftrightarrow\varphi\in B^+(\mathbf{R}^m)$.

Вообще же для вычисления точных констант на классе полезно следующее предложение (ср. [1]).

Лемма 2.

А. $\| \Sigma \lambda_k \mathscr{P}_k f \| \leqq K \| f \|$ *для всех* $f \in C(\mathbf{T}^m)$, *у которых* $\mathscr{P}_0 f = 0$, *тогда и только тогда, когда* $\inf\limits_{\lambda_0} \|\{\lambda_k\}\|_M \leqq K$.

Б. *Если* $\varphi \in B(\mathbf{R}^m)$, *то* $\sup_n \|\{\varphi(k/n)\}\|_M = \| \varphi \|_B$. *Если* φ *локально интегрируема по Риману и для бесконечной последовательности* n, $\| \lambda_{0,n} \mathscr{P}_0 f + \Sigma_{k \neq 0} \varphi(k/n) \mathscr{P}_k f \| \leqq K \| f \|$. Для любой $f \in C(\mathbf{T}^m)$, то φ можно исправить в ее точках разрыва так, что она войдет в $B(\mathbf{R}^m)$ и $\| \varphi \|_B \leqq K$.

3. Некоторые свойства алгебры Берлинга. Берлингом введена следующая алгебра:

$$\mathscr{A}^*(\mathbf{R}) = \{ f\colon f(x) = \int\limits_{\mathbf{R}} g(u) e^{iux} du,\ \| f \|_{\mathscr{A}^*} = \int\limits_0^\infty \operatorname{vrai} \sup_{|u| \geqq t} | g(u) | \, dt < \infty \}.$$

Она обладает многими из тех свойств, которые известны для $\mathscr{A}(\mathbf{R})$ (см., напр., [5]). Локальная принадлежность $\mathscr{A}^*(\mathbf{R})$ эквивалентна локальной принадлежности $\mathscr{A}^*(\mathbf{T})$, имеет место аналог теоремы Винера — Диткина и др. Отметим еще, что существует функция с ограниченной производной и компактным носителем, которая не принадлежит $\mathscr{A}^*(\mathbf{R})$.

Рассмотрим теперь интегральный оператор ($\alpha > 0$)

$$H_\alpha(f) = H_\alpha(f) x = | x |^{-\alpha} \operatorname{sign} x \int\limits_0^x | x - t |^{\alpha - 1} f(t) \, dt$$

(интегральные средние любого порядка α) и оператор деления на степенную функцию ($\alpha > 0$)

$$\mathbf{R}_\alpha(f) = \mathbf{R}_\alpha(f; x) = x^{-\alpha} f(x), \quad | x |^{-\alpha} f(x) \text{ или } f(x) / | x |^\alpha \operatorname{sign} x,$$

соответственно при целом α и нецелом (любое из двух значений).

Теорема 3.

А. H_α — *линейный ограниченный оператор из* $\mathscr{A}(\mathbf{R})$ *в* $\mathscr{A}(\mathbf{R})$ *при* $\alpha > 0$ *и из* $\mathscr{A}(\mathbf{R})$ *в* $\mathscr{A}^*(\mathbf{R})$ *при* $\alpha \geqq 1$.

Б. *Если* f *и* $f^{(\alpha)} \in \mathscr{A}(\mathbf{R})$ *и* $f^{(\nu)}(0) = 0$ *при целых* $\nu \in [0, \alpha)$, *то и* $\mathbf{R}_\alpha f \in \mathscr{A}(\mathbf{R})$. *Если к тому же* $\alpha \geqq 1$, *то* $\mathbf{R}_\alpha f \in \mathscr{A}^*(\mathbf{R})$. *При* $a < 1$ $\mathbf{R}_\alpha f$ *может не принадлежать* $\mathscr{A}^*(\mathbf{R})$.

Подробнее об этом см. в [2, § 2.6]. На случай $m > 1$ теорема 3 обобщена И. Р. Лифляндом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. М. Тригуб. Абсолютная сходимость интегралов, суммируемость рядов Фурье и приближение полиномами на торе. *Изв. АН СССР, Сер. матем.*, **44**, 1980, 1378—1409.
2. Р. М. Тригуб. Суммируемость рядов Фурье и некоторые вопросы теории приближений (ВИНИТИ, № 5145—80, с. 235).
3. О. И. Кузнецова, Р. М. Тригуб. Двусторонние оценки приближения функций средними Рисса и Марцинкевича. *Доклады АН СССР*, **251**, 1980, 34—36.
4. Е. Лукач. Характеристические функции. Москва, 1979.
5. Ж. — П. Кахан. Абсолютно сходящиеся ряды Фурье. Москва, 1976.

Государственный университет,
Математический факультет,
Донецк-55 СССР

Получено 20 июня 1981 г