КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ'81
София, 1983, с. 181—184

CONSTRUCTIVE FUNCTION THEORY'81
Sofia, 1983, p. 181—184

АППРОКСИМАЦИЯ МНОГОЧЛЕНАМИ НА ПОЛУОСИ

В. М. Федоров

Резюме. В сообщении речь будет идти о структурной характеристике класса функций, имеющих заданный порядок наилучшего приближения алгебраическими многочленами на полуоси.

Джрбашян показал [1, 2], что если на полуоси функция $f(x)$ непрерывна и ограничена вместе со своими производными до порядка r включительно, то для каждого натурального числа n существует алгебраический многочлен $P_n(x)$ степени не выше n, такой, что соотношение

(1) $$|f(x)-p_n(x)|\,e^{-x/2}=O(\sqrt{n^{-r}})$$

выполняется равномерно по неотрицательным x. Однако, если при некотором $\varepsilon>0$ левая часть (1) есть $O(\sqrt{n^{-r-\varepsilon}})$, то у функции $f(x)$ существуют r производных, непрерывных лишь на каждом конечном отрезке $[a, b]$, где $0<a<b<\infty$.

Спрашивается, какой класс функций определяет условие (1), если r — положительное число. Отметим, что в докладе М. К. Потапова на этой конференции подробно рассматривается аналогичная задача в случае конечного отрезка.

Пусть фиксированы числа $\alpha\geqq 0$ и $1\leqq q\leqq\infty$, пространство X функций $f(x)$, таких, что функция $f(x)\sqrt{x^\alpha}\,e^{-x/2}$ принадлежит пространству суммируемых в степени q функций при $1\leqq q<\infty$ и существенно ограниченных при $q=\infty$ на полуоси с нормой

$$\|f(x)\|=\begin{cases}\left(\int_0^\infty|f(x)\sqrt{x^\alpha}\,e^{-x/2}|^q dx\right)^{1/q}, & 1\leqq q<\infty,\\ \operatorname{ess\,sup}|f(x)\sqrt{x^\alpha}\,e^{-x/2}|, & q=\infty.\end{cases}$$

Соотношение $A\ll B$ в дальнейшем будет означать выполнение неравенства $A\leqq cB$, где положительная постоянная c зависит лишь от α и q.

Через $E_n(f)$ обозначим наилучшее приближение функции $f(x)$ алгебраическими многочленами $p_n=p_n(x)$ степени не выше $n-1$ в метрике пространства X: $E_n(f)=\inf\{\|f(x)-p_n(x)\|:p_n\}$. Пусть $D=xd^2/dx^2+(\alpha+1-x)\times d/dx$ — дифференциальный оператор, собственными функциями которого являются многочлены Чебышева — Лагерра. Через $\mathrm{A}(D)$ обозначим класс функций $f(x)$ из X таких, что $Df(x)=xf''(x)+(\alpha+1-x)f'(x)$ принадлежит пространству X. Если теперь натуральное число $r>1$ и класс $A(D^{r-1})$ уже определен, то $A(D^r)$ это класс функций из $A(D^{r-1})$ таких, что $D^{r-1}f(x)$ принадлежит классу $A(D)$. При $r=0$ считаем, что $A(D^0)=X$.

Обобщенный сдвиг $T_t(f, x)$, соответствующий оператору D, определим равенством [3, 4]:

$$T_t(f, x)=\pi^{-1/2}\int_{-1}^{1} f(x+t+2z\sqrt{xt})\, e^{-z\sqrt{xt}}\,.\, W(\sqrt{xt(1-z^2)})\,(1-z^2)^{\alpha-(1/2)}dz,$$

где $W(z)$ — целая, четная функция, ограниченная на действительной оси единицей. Оператор T_t нормирован условиями: $T_0(f, x)=f(x)$, $T_t(1, x)=1$; и если $f(x)$ принадлежит пространству X, то

$$\| T_t(f, x)\| \leqslant e^{t/2}\| f(x)\|. \tag{2}$$

Обобщенный модуль непрерывности $\Omega(f, \delta)$ функции $f(x)$ из X определяется так: $\Omega(f, \delta)=\sup\{\| T_t(f, x)-f(x)\| : 0<t\leqq\delta\}$. Сформулируем основные результаты в двух следующих теоремах.

Теорема А. *Если r — натуральное число или нуль, функция $f(x)$ из класса $A(D^r)$, то выполняется неравенство*

$$E_n(f)\leqslant n^{-r}\Omega(g, n^{-1}), \tag{3}$$

где $g(x)=D^r f(x)$.

Теорема В. *Если функция $f(x)$ принадлежит пространству X, то*

$$\Omega(f, n^{-1})\leqslant n^{-1}\sum_{k=1}^{n} E_k(f). \tag{4}$$

Если, кроме того, для некоторого натурального числа r ряд $\sum_{k=1}^{\infty} k^{r-1}E_k(f)<\infty$ сходится, то $f(x)$ из класса $A(D^r)$, а для $g(x)=D^r f(x)$ выполняется неравенство

$$\Omega(g, n^{-1})\leqslant n^{-1}\sum_{k=1}^{n} k^r E_k(f)+\sum_{k=n+1}^{\infty} k^{r-1}E_k(f).$$

Из теорем А и В вытекает

Следствие. *Пусть γ — действительное число из промежутка $0<\gamma<1$, r — натуральное число или нуль. Для того, чтобы функция из пространства X принадлежала классу $A(D^r)$, а для $g(x)=D^r f(x)$ выполнялось неравенство $\Omega(g, 1/n)\leqslant n^{-\gamma}$, необходимо и достаточно, чтобы $E_n(f)\leqslant n^{-r-\gamma}$.*

В метрике пространства X при $q=2$ это следствие доказано в работе [5]. Класс функций, определяемых условиями следствия, называют обобщенными классами Никольского и обозначают через $H_q^{r+\gamma}(D)$.

Ниже мы укажем схему доказательства теорем А и В в случае $r=0$. Для этого сформулируем три леммы. Они являются либо обобщением соответствующих утверждений в случае конечного отрезка, либо известны их некоторые частные случаи.

Пусть x_1 — наименьший корень многочлена Чебышева—Лагерра $p_n^\alpha(x)$. При доказательстве прямой теоремы А важную роль играют свойства ядра $R_n^\alpha(x)=\{p_n^\alpha(x)/(x-x_1)\}^2$.

Лемма 1. *Если γ — действительное число из отрезка $0 \leq \gamma \leq 1$, то выполняется неравенство*

$$(5) \qquad r_n^{-\alpha} \int_0^\infty t^\gamma R_n^\alpha(t/2)\, t^\alpha e^{-t/2} dt \ll n^{-\gamma},$$

где $r_n^\alpha = \int_0^\infty R_n^\alpha(t/2)\, t^\alpha\, e^{-t/2} dt$.

При доказательстве обратной теоремы необходимы неравенства для алгебраических многочленов и их производных в метрике пространства X.

Лемма 2. *Пусть β — неотрицательное число и $p_n(x)$ — алгебраический многочлен степени не выше $(n-1)$, тогда*

$$(6) \qquad \| (\sqrt{x} + 1/\sqrt{n}) p_n'(x) \| \ll \sqrt{n}\, \| p_n(x) \|,$$

$$(7) \qquad \| \sqrt{x}^\beta p_n(x) \| \ll \sqrt{n}^\beta \| p_n(x) \|,$$

$$(8) \qquad \| p_n(x) \| \ll \sqrt{n}^\beta \| \sqrt{x}^\beta p_n(x) \|.$$

Неравенства (6) и (7) в случае метрики пространства X при $q = \infty$ доказаны в [6]. Следствием (6), (7), (8) является следующее неравенство:

$$(9) \qquad \| D p_n(x) \| \ll n \| p_n(x) \|.$$

В работе [4] показано, что обобщенный модуль непрерывности $\Omega(f, \delta)$ при $\delta \to 0$ эквивалентен k-функционалу $K(f, \delta)$, интерполирующему между областью определения обобщенного сдвига и областью определения оператора D. Нам потребуются более точные неравенства. Пусть

$$K(f, \delta) = \inf_{\substack{f = f_1 + f_2 \\ f_1 \in X, f_2 \in A(D)}} \{ \| f_1(x) \| + \delta \| D f_2(x) \| \}.$$

Лемма 3. *Если функция $f(x)$ принадлежит пространству X, тогда*

$$(10) \qquad K(f, \delta) \ll \Omega(f, \delta) \ll e^{\delta/2} K(f, \delta).$$

Если, кроме того, $f(x)$ из класса $A(D)$, то

$$(11) \qquad \Omega(f, \delta) \ll \delta e^{\delta/2} \| D f(x) \|.$$

Докажем теперь теорему А в случае $r = 0$. Обобщенная свертка функции $f(x)$ и ядра $R_m^\alpha(t/2)$

$$Q_m(f, x) = r_m^{-\alpha} \int_0^\infty T_t(f, x) R_m^\alpha(t/2)\, t^\alpha\, e^{-t} dt$$

дает алгебраический многочлен степени не выше $2m-2$. Выберем натуральное число m так, что $n-2 < 2m-2 \leq n-1$, тогда

$$E_n(f) \leq \| f(x) - Q_m(f, x) \| \leq r_m^{-\alpha} \int_0^\infty \Omega(f, t) R_m^\alpha(t/2)\, t^\alpha\, e^{-t/2} dt.$$

Используя правую часть неравенства (10), лемму 1, а затем левую часть неравенства (10), получаем

$$E_n(f) \ll r_m^{-\alpha} \int_0^\infty K(f, t) R_m^\alpha(t/2)\, t^\alpha\, e^{-t/2} dt \ll K(f, n^{-1}) \ll \Omega(f, n^{-1}).$$

Следовательно, неравенство (3) в случае $r = 0$ доказано.

Докажем теперь (4). Пусть $p_n(x)=p_n(f, x)$ — многочлены наилучшего приближения функции $f(x)$ в метрике пространства X. Выберем натуральное число m так, что $2^m \leq n < 2^{m+1}$, тогда, используя (2) и (11), имеем

$$(12)\quad \Omega(f, n^{-1}) \leq \Omega(f-p_{2^m}, n^{-1})+\Omega(p_{2^m}, n^{-1}) \ll E_{2^m}(f)+n^{-1}\| Dp_{2^m}(x)\|.$$

Оценим второе слагаемое. Простые преобразования и (9) дают

$$(13)\qquad \| Dp_{2^m}(x)\| \ll \| Dp_1(x)\| + \sum_{\nu=0}^{m-1} \| D[p_{2^{\nu+1}}(x)-p_{2^\nu}(x)]\|$$

$$\ll \sum_{\nu=0}^{m-1} 2^\nu \| p_{2^{\nu+1}}(x)-p_{2^\nu}(x)\|.$$

Используя очевидные неравенства

$$(14)\qquad \| p_{2^{\nu+1}}(x)-p_{2^\nu}(x)\| \leq 2E_{2^\nu}(f),\quad 2^{\nu-1}E_{2^\nu}(f) \leq \sum_{k=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu} E_k(f),$$

получаем из (13) $\| Dp_{2^m}(x)\| \ll \Sigma_{k=1}^{2^m-1} E_k(f)$. Отсюда и из (12), (14) получаем (4).

В заключение автор выражает благодарность М. К. Потапову за постановку задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. М. Джрбашян. О взвешенно-наилучшем приближении полиномами на вещественной оси. *Доклады АН СССР*, **84**, 1952, № 6.
2. М. М. Джрбашян. Некоторые вопросы теории взвешенно-полиномиальных приближений в комплексной области. *Мат. сб.*, **78**, 1955, № 3, 353—440.
3. G. N. Watson. Another note in Laguerre polynomials. *J. London Math. Soc.* **14**, 1939, 19—20.
4. J. Löfstöm, J. Peetre. Approximation theorem connected with Generalized Translation. *Math. Ann.*, **181**, 1969, 255—268.
5. Е. В. Ржавинская. О приближении функций в среднем суммами Фурье — Лагерра. *Изв. ВУЗ, Сер. матем.*, 1979, № 11, 87—93.
6. G. Freud. On two polynomial inequalities. II. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **23**, 1972, No 2, 137—145.

МГУ, Механико-математический факультет
117234 Москва *СССР*

Получено 10 июня 1981 г.