КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ'81
София, 1983, с. 185—188

CONSTRUCTIVE FUNCTION THEORY'81
Sofia, 1983, p. 185—188

О СХОДИМОСТИ НЕКОТОРЫХ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ В ИНТЕГРАЛЬНЫХ И ДИСКРЕТНЫХ НОРМАХ

В. Х. Христов

Резюме. Для 2π-периодической, вещественной, ограниченной и интегрируемой по Риману функции f через характеристики $\omega_k(f;\delta)_{L^p}$ и $\tau_k(f;\delta)_{L^p}$ получены оценки при $p\in(1,\infty)$ для

$$\|f-I_{n,\nu}(f)\|_{L^p(l^p_{2n+1})},$$

где $I_{n,\nu}(f)$ — ν-тая частичная сумма интерполяционного тригонометрического полинома $I_n(f)$ функции f, построенного по $2n+1$ равноотстоящим узлам периода.

Пусть $f(x)$ — 2π-периодическая и ограниченная функция и пусть $I_n(f;x)$ — ее тригонометрический интерполяционный полином порядка n, построенный по $2n+1$ равноотстоящих на периоде узлов ([1, с. 10]):

$$x_j^{(n)}=2\pi j/(2n+1),\qquad j=0,\ 1,\dots,\ 2n. \tag{1}$$

Пусть $I_{n,\nu}(f;x)$ — ν-тая частичная сумма полинома $I_n(f;x)$ $(\nu\leqq n)$.

Для любого $p\in[1,\infty)$, как обычно, интегральную норму функции g определяем выражением $\|g\|_{L^p}=\{(2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi}|g(t)|^p dt\}^{1/p}$, а дискретную — выражением

$$\|g\|_{l^p_{2n+1}}=\Big\{\frac{2\pi}{2n+1}\sum_{j=0}^{2n}|g(\xi_j)|^p\Big\}^{1/p}, \tag{2}$$

где точки ξ_j $(j=0,1,\dots,2n)$ в наших рассмотрениях всегда будут совпадать с узлами интерполяции (1), и это не будем отмечать в дальнейшем.

В прикладном гармоническом анализе $I_{n,\nu}(f;x)$ и их линейные комбинации часто используются как аппарат для приближения периодической функции $f(x)$. Это обуславливается и тем, что для любой ограниченной и интегрируемой по Риману функции при $p\in[1,\infty)$ (см. [1, с. 45, 50])

$$\|f-I_{n,\nu}(f)\|_{L^p} \tag{3}$$

стремится к нулю, когда $n\geqq\nu\to\infty$.

Цель настоящей статьи дать оценки для величины (3), которая зависит от f, p, ν и n через некоторые конструктивные характеристики функции f. Отметим, что нельзя оценить (3) только через интегральный модуль непрерывности функции f в L^p:

$$\omega_k(f;\delta)_{L^p} = \sup\{\|\Delta_h^k f(t)\|_{L^p} : |h| \leqq \delta\} \quad (\delta > 0),$$

где $\Delta_h^k f(t) = \Sigma_{j=1}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} f(t+jh)$, так как изменяя функцию f на дискретном множестве точек, $\omega_k(f;\delta)_{L^p}$ не меняется, а величина (3) может существенно измениться. Характеристика функции f, через которую можно оценить (3), есть модуль (об истории и об некоторых его применениях см. [2] и [3])

$$\tau_k(f;\delta)_{L^p} = \|\omega_k(f;x,\delta)\|_{L^p},$$

где $\omega_k(f;x,\delta) = \sup\{|\Delta_h^k f(t)|;\ t, t+kh \in [x-k\delta/2, x+k\delta/2]\}$.

Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть f — конечная и интегрируемая по Риману функция, $p \in (1,\infty)$ и k, ν, n — натуральные числа, $\nu \leq n$. Тогда для любого $h \geqq 2\pi/(2n+1)$ имеет место неравенство*

$$\|f - I_{n,\nu}(f)\|_{L^p} \leqq C_{k,p}(\tau_k(f;h)_{L^p} + (\nu h)^{-k}\omega_k(f;h)_{L^p}), \tag{4}$$

где $C_{k,p}$ — константа, зависящая лишь от k и p.

В случае, когда хотим оценить уклонение $I_{n,\nu}(f)$ от функции f относительно дискретной нормы (2), справедлива следующая оценка, аналогичная (4):

Теорема 2. *Пусть f — ограниченная и интигрируемая по Риману функция, $p \in (1,\infty)$ и k, ν, n — натуральные числа $(\nu \leqq n)$. Тогда для любого $h \geqq 2\pi/(2n+1)$ выполнено неравенство*

$$\|f - I_{n,\nu}(f)\|_{l^p_{2n+1}} \leqq C_{k,p}(\tau_k(f;h)_{L^p} + (\nu h)^{-k}\omega_k(f;h)_{L^p}), \tag{5}$$

где $C_{k,p}$ зависит лишь от k и p.

Из неравенства (5) при $h = 2\pi/(2\nu+1)$, используя, что $\omega_k(f;\delta)_{L^p} \leqq \tau_k(f;\delta)_{L^p}$ (см. [2]), легко получается оценка для наилучшего приближения $E_\nu(f)_{l^p_{2n+1}}$ $(\nu \leqq n)$ функции f тригонометрическими полиномами порядка не выше ν относительно дискретной нормы (2):

Теорема 3. *Для любой ограниченной и интегрируемой по Риману функции f и для любых $p \in (1,\infty)$ и натуральных ν, k и $n (\nu \leqq n)$ выполнено неравенство $E_\nu(f)_{l^p_{2n+1}} \leqq C_{k,p}\tau_k(f;1/\nu)_{L^p}$.*

Последнее неравенство при $p=2$ дает оценку погрешности между f и полиномом $T_\nu(f;x)$ порядка не выше ν, полученного методом наименьших квадратов относительно узлов (1), так как $E_\nu(f)_{l^2_{2n+1}} = \|f - I_{n,\nu}(f)\|_{l^2_{2n+1}} = \|f - T_\nu(f)\|_{l^2_{2n+1}}$.

Учитывая свойства модуля $\tau_k(f;\delta)_{L^p}$, легко получаются следующие следствия.

Следствие 1. *Для любой ограниченной и интегрируемой по Риману функции f справедливы оценки* $(1<p<\infty)$:

$$\|f-I_{n,\nu}(f)\|_{L^p(l^p_{2n+1})}\leqq C_{k,p}\tau_k(f;\,1/\nu)_{L^p}.$$

Так как $\tau_1(f;\,\delta)_{L^p}\to 0$ при $\delta\to 0$ для любой интегрируемой по Риману функции f, то из следствия 1 получаем

Следствие 2. *Для любой ограниченной и интегрируемой по Риману функции* f $\|f-I_{n,\nu}(f)\|_{L^p}\to 0$ $(1<p<\infty)$, *когда* $n\geqq\nu\to\infty$.

Учитывая, что если f абсолютно непрерывная и $f'\in L^p$, и $\tau_{k+1}(f;\delta)_{L^p}\leqq C_k\delta\omega_k(f';\,\delta)_{L^p}$ (см. [3, 4]), получаем

Следствие 3. *Пусть f абсолютно непрерывная и $f'\in L^p$, $p\in(1,\infty)$. Тогда*

$$\|f-I_{n,\nu}(f)\|_{L^p(l^p_{2n+1})}\leqq C_{k,p}\omega_k(f';\,1/\nu)_{L^p}\nu^{-1}.$$

Последнее неравенство показывает, что для дифференцируемых функций f величины $\|f-I_{n,\nu}(f)\|_{L^p(l^p_{2n+1})}$ можно оценить лишь интегральным модулем непрерывности производной функции f и что порядок убывания левых сторон (4) и (5) в этом случае совпадает с порядком убывания наилучшего приближения функции f.

Характеристику $\tau_k(f;\,\delta)_{L^p}$ можно связать и с некоторыми характеристиками функции f, учитывающими вариацию f. Например, если f имеет ограниченную p-вариацию (см. [5, с. 287]), т. е. если

$$V_p(f)=\sup\{(\sum_{j=0}^{l-1}|f(t_{j+1})-f(t_j)|^p)^{1/p}:0=t_0<t_1<\ldots<t_l=2\pi\}<\infty,$$

то $\tau_1(f;\,2\pi/n)_{L^p}\leqq 2n^{-1/p}V_p(f)$.

Из последнего неравенства и из следствия 1 получаем

Следствие 4. *Если* $V_p(f)<\infty$, $1<p<\infty$, *то* $\|f-I_{n,\nu}(f)\|_{L^p(l^p_{2n+1})}\leqq C_pV_p(f)\nu^{-1/p}$, *а если* $V_p(f^{(r)})<\infty$, $1<p<\infty$, *то* $\|f-I_{n,\nu}(f)\|_{L^p(l^p_{2n+1})}\leqq C_{r,p}\nu^{-r-1/p}(\nu\leqq n)$.

Через модуль $\tau_k(f;\,\delta)_{L^p}$ можно получить оценки для уклонения относительно норм пространств L^p и l^p_{2n+1} между f и некоторыми другими интерполяционными процессами, например, для второго процесса Бернштейна $U_n(f;\,x)$ (см. [6, 566, интерполяционный аналог сумм Бернштейна—Рогозинского], [6, с. 269]) и для процесса С. И. Раппопорт $R_n(f;\,x)$ (см. [6, с. 574, интерполяционный аналог интеграла Валле-Пуссена], [6, с. 257). Точнее, справедлива

Теорема 4. *Для любой ограниченной и интегрируемой по Риману функции f справедливы оценки*

$$\|f-U_n(f)\|_{L^p(l^p_{2n+1})}\leqq C_p\tau_2(f;\,1/n)_{L^p}\quad(1<p<\infty),$$

$$\|f-R_n(f)\|_{L^p}\leqq C_p\tau_2(f;\,1/\sqrt{n})_{L^p}\quad(1\leqq p\leqq\infty).$$

Доказательства сформулированных выше утверждений и некоторые другие следствия приведены в [7] и [8]. К этому кругу вопросов примыкает и работа [9], где обсуждается случай $p=\infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Зигмунд. Тригонометрические ряды. Т. II. Москва, 1965.
2. А. Андреев, В. А. Попов, Бл. Сендов. Теоремы типа Джексона для наилучших односторонних приближений тригонометрическими многочленами и сплайнами. *Матем. заметки*, **26**, 1979, № 5, 791—804.
3. В. А. Попов. Заметка об одностороннем приближении функций. *Доклады БАН*, **32**, 1979, № 10, 1319—1322.
4. K. G. Ivanov. On a new characteristic of functions 1. *Serdica*, **8**, 1982, 262—279.
5. Н. К. Бари. Тригонометрические ряды. Москва, 1961.
6. И. П. Натансон. Конструктивная теория функций. Москва, 1949.
7. В. Х. Христов. О сходимости в среднем интерполяционных полиномов периодических функций. (Препринт ОИЯИ Р-5 117, Дубна, 1981); *Плиска*, **5**, 1983, 14—22.
8. В. Х. Христов. О коэффициентах Фурье — Лагранжа. (Препринт ОИЯИ Р-5 118, Дубна, 1981.); *Плиска*, **5**, 1983, 23—31.
9. В. Х. Христов. Критерий типа Дини — Липшица для равномерной сходимости интерполяционных полиномов. *Плиска*, **1**, 1977, 128—133.

Единен център по математика и механика
1090 София, п. к. 373 България

Получено 7 июля 1981 г.