КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ'81
София, 1983, с. 189—193

CONSTRUCTIVE FUNCTION THEORY'81
Sofia, 1983, p. 189—193

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ В МЕТРИКЕ ПРОСТРАНСТВА $\mathscr{L}^{p(t)}([a, b])$ И КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ

И. И. Шарапудинов

Резюме. В статье изучаются некоторые вопросы теории приближений в пространстве $\mathscr{L}^{p(t)}(E)$ с нормой $\|f\|_p(E)=\inf\{\alpha>0 \mid \int_E |\alpha^{-1} f(t)|^{p(t)} dt \leqq 1\}$. Получены неравенства разных метрик, соотношения для наилучших приближений и аналог обобщенного неравенства Минковского. Вводятся аналоги классов Соболева и получены оценки для верхних граней наилучших приближений и точные значения погрешностей квадратурных формул на этих классах, как следствие доказывается аналог неравенства Джексона. Показано, что использование переменного показателя обладает рядом преимуществ. В частности, могут быть достигнуты более точные оценки для погрешностей квадратурных формул. Это показано на конкретных примерах.

Через $\mathscr{L}^{p(t)}(E)$ обозначим множество измеримых функций $f(t)$, определенных на E, и таких, что $\int_E |f(t)|^{p(t)} dt<\infty$, где $1 \leqq p(t)$ — измеримая, существенно ограниченная на E функция. Тогда $\mathscr{L}^{p(t)}(E)$ — линейное нормированное пространство с нормой

(1) $$\|f\|_p(E)=\inf\{\alpha>0 / \int_E |\alpha^{-1} f(t)|^{p(t)} dt \leqq 1\}$$

(см. [1]). Цель настоящей работы — перенести некоторые известные результаты теории приближений в пространствах $\mathscr{L}^{p}([a, b])$ с постоянным показателем p на случай переменного показателя $p=p(t)$. Основные трудности при этом в первую очередь связаны с тем, что в случае переменного показателя $p(t)$ из $f \in \mathscr{L}^{p(t)}([a, b])$ необязательно следует $f^h(t)=f(t+h) \in \mathscr{L}^{p(t)}([a, b])$.

На протяжении всей работы $p(t)$, $g(t)$ — измеримые функции,

$$\|f\|_p=\|f\|_p([0, 1]),\ \underline{\varphi}(E)=\operatorname{vraimin}\{|\varphi(t)|: t \in E\},\ \overline{\varphi}(E)=\operatorname{vraimax}\{|\varphi(t)|: t \in E\},$$

$$\underline{\varphi}=\underline{\varphi}([0, 1]),\ \overline{\varphi}=\overline{\varphi}([0, 1]),\ p'(t)=\begin{cases} p(t)/(p(t)-1), & (p(t)>1), \\ \infty, & (p(t)=1). \end{cases}$$

Теорема 1. *Пусть $p(t)$ и $q(t)$ — функции, заданные на* $[0, 1]$, *такие, что $1 \leqq p(t) \leqq q(t) \leqq \overline{q}<\infty$. Тогда для любой функции*

(2) $$f \in \mathscr{L}^{q(t)}([0, 1])\ \|f\|_p \leqq r_{p, q} \cdot \|f\|_q,$$

где $r_{p,q} = 1/\alpha + 1/\alpha'\alpha 2$ $(\alpha(t) = q(t)/p(t))$, *причем*

(3) $$\sup_{\substack{(p,\,q)\\ 1\leq p(t)\leq q(t)}} \sup \left\{\frac{\|f\|_p}{\|f\|_q},\ f \in \mathscr{L}^{q(t)}([0, 1])\right\} = 2.$$

Теорема 2. *Пусть* $p(t)$ *и* $f(t)$ — *измеримые существенно ограниченные функции, заданные на множестве* E $(\operatorname{mes} E < \infty)$. *Тогда*

(4) $$\lim_{\underline{p}(E)\to\infty} \|f\|_p(E) = \bar{f}(E).$$

Замечание. В случае, когда $p(t) = \mathrm{const}$, теорема 2 хорошо известна (см. [2, с. 12]).

Теорема 3. *Пусть* $p_n(t) \geq 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$ — *последовательность равномерно существенно ограниченных функций, которая почти всюду на* E $(\operatorname{mes} E < \infty)$ *сходится к существенно ограниченной функции* $p(t) \geq 1$. *Если суммируемые на множестве* E *функции* $f(t)$ *и* $\varphi(t)$ *таковы, что* $f(t)^{p_n(t)} \leq \varphi(t)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *почти всюду на* E, *то*

(5) $$\lim_{n\to\infty} \|f\|_{p_n}(E(= \|f\|_p(E).$$

Теорема 4. *Пусть* $\{p_k(t)\}_1^\infty$ — *последовательность измеримых функций таких, что* $1 \leq p_k(t) \leq p^* < \infty$, *где константа* p^* *не зависит от* k, *почти всюду на* E $(\operatorname{mes} E < \infty)$ *сходится к функции* $p_0(t)$. *Далее, пусть* $f \in \mathscr{L}^{p^*}(E)$ $\varphi_0(t), \cdots, \varphi_n(t)$ — *линейно независимая система существенно ограниченных на* E *функций,* F — *линейная оболочка этих функций,*

$$E_F(f)_q = \inf\{\|f - \varphi\|_q = \|f - \varphi_q\|_q : \varphi \in E\} \quad (\varphi_q \in F).$$

Тогда $E_F(f)_{p_k} \to E_F(f)_{p_0}$ $(k \to \infty)$. *Из последовательности* $\{\varphi_{p_k}(t)\}$ *можно выделить подпоследовательность* $\{\varphi_{(p,\,k,\,n)}\}$, *которая равномерно почти всюду сходится к некоторому* $\varphi_{p_0}(t)$. *Если, кроме того,* φ_{p_0} *единствен, то равномерно почти всюду на* E $\lim\limits_{k\to 8} \varphi_{p_k}(t) = \varphi_{p_0}(t)$.

Теорема 5. *Пусть* $f(t, x)$ — *измеримая функция, заданная на прямоугольнике* $[0, 1]\times[a, b]$. *Тогда имеет место неравенство*

(6) $$\left\|\int_a^b |f(\cdot, x)|\,dx\right\|_p \leq r_p \int_a^b \|f(\cdot, x)\|_p\,dx,$$

где $r_p \leq 1/p + 1/p' < 2$, $1 \leq p(t) \leq \bar{p} < \infty$.

Пусть $p(t) \geq 1$ — измеримая, почти везде конечная функция, заданная на E. Обозначим через $\mathscr{L}\mathscr{L}^{p(t)}(E)$ линейное нормированное пространство функций $f(t)$, заданных на E, с нормой

(7) $$\|f\|_p(E) = \inf\left\{\alpha > 0 \,\middle|\, \int_0^1 |\alpha^{-1} f(t)|^{p(t)}\,dt \leq 1\right\}$$

(см. [1, с. 618]). Если $p(t) > 1$, то иногда удобно пользоваться следующей нормой для $f \in \mathscr{L}\mathscr{L}^{p(t)}(E)$:

(8) $${}_*\|f\|_p(E) = \sup\left\{\int_E f(t)g(t)\,dt : g \in \mathscr{L}\mathscr{L}^{p'(t)}(E),\ \|g\|_{p'}(E) \leq 1\right\}.$$

Для измеримой и существенно ограниченной на $[a, b]$ функции $p=p(t)$ построим классы $\tilde{W}^r_p[M, a, b]$ по типу хорошо известных классов Соболева: класс $\tilde{W}^r_p[M, a, b]$ состоит из $r-1$ раз непрерывно-дифференцируемых функций $f(t)$ периода $b-a$, у которых $f^{(r-1)}(t)$ абсолютно непрерывна и

$$\|f^{(r)}\|_p([a, b])\leq M. \tag{9}$$

В частности, положим $\tilde{W}^r_p=\tilde{W}^r_p[1, 0, 2\pi]$, $\tilde{W}^r_p(1)=\tilde{W}^r_p[1, 0, 1]$. Если почти везде на $[a, b]$ $1<p(t)\leq\bar{p}([a, b])<\infty$, то по аналогии вводим классы ${}_*\tilde{W}^r_p[M, a, b]$, ${}_*\tilde{W}^r_p$, ${}_*\tilde{W}^r_p(1)$, с той лишь разницей, что вместо неравенства (9) используется неравенство ${}_*\|f^{(r)}\|_p([a, b])\leq M$.

Результаты, полученные выше и в статье [1], позволяют перенести на классы $\tilde{W}^r_p$ метод двойственности Никольского (см. [3, 4]).

Через $E_n(f)_p$ обозначим наилучшее приближение функции $f\in\mathscr{L}^{p(t)}([0, 2\pi])$ тригонометрическими полиномами T_n порядка $n-1$. Если $\mathfrak{M}$ — некоторый класс функций из $\mathscr{L}^{p(t)}([0, 2\pi])$, то полагаем $E_n(\mathfrak{M})_p=\sup\{E_n(f)_p : f\in\mathfrak{M}\}$.

При каждом $n=1, 2, \ldots$ в классе $\tilde{W}^r_p$ выделим подкласс $\tilde{W}^r H^n_p$ функций f, ортогональных тригонометрическим полиномам T_n порядка $n-1$. Под H^n_p $(n=0, 1, \ldots)$ будем понимать множество 2π-периодических функций $f\in\mathscr{L}\mathscr{L}^{p(t)}([0, 2\pi])$, удовлетворяющих при $n\geq 1$ соотношениям $\int_0^{2\pi} f(t)\begin{matrix}\cos kt\\ \sin kt\end{matrix}\,dt=0$ $(k=0, \ldots, n-1)$ с нормой $\|f_p\|([0, 2\pi])\leq 1$. Аналогично в классах ${}_*\tilde{W}^r_p$ и $\mathscr{L}\mathscr{L}^{p(t)}([0, 2\pi])$ выделим подклассы ${}_*\tilde{W}^r H^n_p$ и ${}_*H^n_p$.

Теорема 6. *Пусть $1<p(t)$, $q(t)$ $(t\in[0, 2\pi])$ — существенно ограниченные измеримые функции, заданные на $[0, 2\pi]$. Тогда имеет место соотношение*

$$\sup\{E_n(f)_q : \|\varphi\|_p\leq 1\}=\sup\{{}_*\|f\|_{p'} : \varphi\in{}_*H^n_q\},$$

где

$$(p(t))^{-1}+(p'(t))^{-1}=(q(t))^{-1}+(q'(t))^{-1}=1,$$

$$f(x)=(2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi} D_r(x-t)\varphi(t)dt,\ D_r(u)=\sum_{k=1}^{\infty} k^{-r}\cos(ku+(\pi r)/2).$$

Через ${}_*E_n(f)_q$ обозначим наилучшее приближение функции f тригонометрическими полиномами порядка $n-1$ по норме ${}_*\|\cdot\|_q$. Имеет место

Теорема 7. *В тех же предположениях относительно $p(t)$ и $q(t)$, что и в теореме 6 справедливо неравенство*

$$E_n(\tilde{W}^r_p)_q\leq\sup\{{}_*E_1(f)_{p'} : f\in{}_*\tilde{W}^r H^n_{q'}\}, \tag{10}$$

причем, если $\underline{p}([0, 2\pi])>1$, то в (10) имеет место знак равенства.

Пусть $1\leq p(t)\leq\bar{p}([0, 2\pi])$. Если f — периодическая функция из $\mathscr{L}^{p(t)}([0, 2\pi])$, то положим для любых действительных h_1 и h_2 $f^{h_1, h_2}(t)=f(t+h_1)-f(t+h_2)$ и рассмотрим величину

$$\omega(f, \delta)_p=\sup_{|h_1-h_2|\leq\delta}\|f^{h_1, h_2}\|_p([0, 2\pi]). \tag{11}$$

В случае постоянного p $\omega(f, \delta)_p$ есть обычный модуль непрерывности функции $f \in \mathscr{L}^p([0, 2\pi])$.

Теорема 8. *Пусть $p(t)$ — измеримая функция, заданная на $[0, 2\pi]$ и такая, что $1 \leq p(t) \leq \overline{p}([0, 2\pi]) < \infty$, f — 2π-периодическая функция из $\mathscr{L}^{p(t)}([0, 2\pi])$. Тогда $E_n(f)_p \leq [(1/2) + r_p([0, 2\pi])]\, \omega(f, \pi/n)_p$ $(r_p([0, 2\pi]) \leq 1/\underline{p}([0, 2\pi]) + 1/\underline{p}'([0, 2\pi]) \leq 2)$.*

Введем класс $W_p^r(M, a, b)$ функций, заданных на $[a, b]$, имеющих абсолютно непрерывную производную порядка $r-1$ и производную порядка r, обладающую тем свойством, что $\| f^r \|_p([a, b]) \leq M$. В частности, положим $W_p^r = W_p^r(1, 0, 1)$. Если при $t \in [a, b]$ $1 < p(t) \leq \overline{p}([a, b]) < \infty$, то по аналогии введем классы ${}_*W_p^r(M, a, b)$ и ${}_*W_p^r = {}_*W_p^r(1, 0, 1)$. Пусть $f \in W_p^r (f \in {}_*W_p^r)$. Рассмотрим квадратурную формулу

$$\int_0^1 f(t)dt = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=0}^{\rho} p_{kl} f^{(l)}(x_k) + R(f) = L(f) + R(f), \tag{12}$$

задаваемую векторами узлов $X = \{x_k\}$ $(0 \leq x_1 < \cdots < x_m \leq 1)$ и коэффициен) тов $P = \{p_{kl}\}$ $(k = 1, \ldots, m, l = 0, \ldots, \rho)$, т. е. $L(f) = L(f, X, P)$, $R(f = R(f;\ X, P)$. Требуется найти величину

$$R[\mathfrak{M}] = R[\mathfrak{M},\ X,\ P\ ] = \sup\{ | R(f;\ X,\ P)] : f \in \mathfrak{M}\}, \tag{13}$$

где $\mathfrak{M}$ — один из классов W_p^r или ${}_*W_p^r$. В случае, когда p — постоянная, подобные задачи исследованы в работах В. И. Крылова, С. М. Никольского и других (см., например, [5, 6]).

В предположении, что квадратурная формула точна для многочленов степени $r-1$ $(r \geq 1)$ в ([6, с. 140]), получено следующее выражение для $R(f)$:

$$R(f) = \frac{(-1)^r}{r!} \int_0^1 G_r(t) f^{(r)}(t)\, dt,$$

где

$$G_r(t) = (t-1)^r - (-1)^r \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=0}^{\rho} \frac{r!}{(r-l-1)!} p_{kl} K_{r-l}(x_k - t),$$

$$K_\nu(t) = \begin{cases} t^{\nu-1} & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \quad (\nu = 1, 2, \ldots). \end{cases}$$

Если же квадратурная формула точна для констант, а $f \in \tilde{W}_p^r(1)$, то имеет место следующее представление (см. [6, с. 170]):

$$R(f) = \frac{(-1)^r}{r!} \int_0^1 \tilde{G}_r(t) f^{(r)}(t)\, dt,$$

где

$$\tilde{G}_r(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\rho} \frac{(-1)^l r!}{(r-l)!} p_{kl} B_{r-l}^*(t - x_k) + C_r,$$

$$B_r^*(t) = 2^{-r+1} \pi^{-r} r!\ D_r(2\pi t) \qquad (r = 2, 3, \ldots),$$

$$B_1^*(t)=\begin{cases} -\pi^{-1}D_1(2\pi t) & (0<t<1), \\ -\pi^{-1}D_1(0+0)=-1/2 & (t=0)\,;\ B_1^*(t+1)=B_1^*(t). \end{cases}$$

Теорема 9. *Имеют место следующие соотношения* $(1/p(t)+1/p'(t)=1)$:

$$R[W_p^r]=(r!)^{-1}_{\ *}\|G_r\|_{p'},\qquad R[{}_*W_p^r]=(r!)^{-1}\|G_r\|_{p'},$$

$$R[{}_*W_p^r]=(r!)^{-1}\|G_r\|_{p'}\ (1<\underline{p}\leqq p(t)\leqq\bar{p}<\infty),$$

$$R[W_p^r]\leqq r_p(r!)^{-1}\|G_r\|_{p'}\ (r_p\leqq 1/\underline{p}+1/\underline{p}'),$$

(14) $$R[{}_*\tilde{W}_p^r(1)]\leqq(r!)^{-1}\|\tilde{G}_r\|_{p'},$$

(15) $$R[\tilde{W}_p^r(1)]=(r!)^{-1}{}_*\|\tilde{G}_r\|_{p'}$$

$$(1<p\leqq p(t)\leqq\bar{p}<\infty),$$

(16) $$R[\tilde{W}_p^r(1)=(r!)^{-1}{}_*\|\tilde{G}_r\|_{p'}\ (1<\underline{p}\leqq p(t)\leqq\bar{p}<\infty),$$

(17) $$R[\tilde{W}_p^r(1)]\leqq r_p(r!)^{-1}\|\tilde{G}_r\|_{p'}\ (r_p\leqq 1/\underline{p}+1/\underline{p}'),$$

где квадратурная формула (12) *точна для многочленов степени* $r-1$ *в непериодическом случае и для констант в периодическом случае, а константа* C_r *в* (13) *выбрана из условия минимума норм в правых частях соотношений* (14)—(17).

Замечание. Удобно иметь следующее обобщение нормы (1). Пусть $\Delta>0$, $\varphi\in\mathscr{L}\mathscr{L}^{p(t)}(E)$, $1\leqq p(t)<\infty$. Положим

(18) $$\|\varphi\|_{p,\Delta}(E)=\inf\{\alpha>0\mid\int_E\left|\frac{\varphi(t)}{\alpha}\right|^{p(t)}dt\leqq\Delta\}.$$

Резултаты, полученные выше, могут быть сформулированы и в терминах нормы (18).

ЛИТЕРАТУРА

1. И. И. Шарапудинов. О топологии пространства $\mathscr{L}^{p(t)}([0,1])$. *Мат. заметки*, **26**, 1979, № 4, 613—632.
2. С. М. Никольский. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. Москва, 1977.
3. Н. П. Корнейчук. Экстремальные задачи теории приближений. Москва, 1976.
4. С. М. Никольский. Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем. *Изв. АН СССР, Сер. матем.*, **10**, 1946, 207—256.
5. В. И. Крылов. Приближенное вычисление интегралов. Москва, 1967.
6. С. М. Никольский. Квадратурные формулы. Москва, 1974.

Ул. им. Тимирязева 23/86
367010 Махачкала СССР

Получено 24 июня 1981 г.