КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ'81
София, 1983, с. 336—340

CONSTRUCTIVE FUNCTION THEORY'81
Sofia, 1983, p. 336—340

KONSTRUKTION EINER FOLGE LINEARER OPERATOREN ZUR APPROXIMATION AUF DER GANZEN REELLEN ACHSE

J. Gróf

Zusammenfassung. Wir konstruieren eine neue Folge linearer Operatoren (H_n) womit man ähnlicherweise approximieren kann, wie mit den Szász-Operatoren, aber nicht nur auf der positiven bzw. negativen Seite der reellen Achse, sondern auf beiden Seiten zugleich.

Die Struktur der neuen Operatoren H_n und die der Szász-Operatoren gleichen einander in vieler Hinsicht, es gibt aber auch einen wichtigen Unterschied: Die Szász-Operatoren sind positiv, die Operatoren H_n dagegen nicht positiv.

Wir beschreiben die Gedankenfolge, die zur Konstruktion der neuen Operatoren führt. Dabei können wir auf manche Approximationseigenschaften der Operatoren hinweisen.

1. Es sei S_n der Szász-Operator, d. h.

$$S_n(f;\, x)=S_n(f)(x)=e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty} f\Big(\frac{k}{n}\Big)\frac{(nx)^k}{k!} \quad (x\geqq 0,\ n=1,\ 2,\dots).$$

Eine bekannte Tatsache (mit Hilfe des Satzes von Korovkin [2] ist es leicht zu beweisen): Ist die Funktion f im Intervall $[0,\infty)$ beschränkt und in jedem Punkt $x\in[a,b]$ stetig (hier ist $a\geqq 0$), so gilt $S_n(f)\to f$ $(n\to\infty)$ gleichmäßig auf $[a,b]$. Weiterhin ist es evident, daß die nach der Gleichung

$$S_n^{(-)}(f;\, x)=e^{nx}\sum_{k=0}^{\infty} f\Big(-\frac{k}{n}\Big)\frac{(-nx)^k}{k!} \quad (x\leqq 0,\quad n=1,\ 2,\dots)$$

definierten Operatoren $S_n^{(-)}$ im Intervall $(-\infty,0]$ dieselbe Rolle spielen, wie die Operatoren S_n in $[0,\infty)$. Will man aber die Funktion f zugleich auf beiden Seiten der Zahlengerade approximieren, dann ist sowohl S_n, als auch $S_n^{(-)}$ ungeeignet. Wir setzen uns zum Ziel, eine Folge linearer Operatoren zu konstruieren, die auf der ganzen Zahlengerade geeignet ist.

Im folgenden nehmen wir immer an, daß f eine auf der Menge **R** definierte reellwertige Funktion ist, in Zeichen: $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, wobei **R** die Menge der reellen Zahlen bedeutet.

2. Im ersten Schritt der Konstruktion definieren wir die Operatoren H_n^* und H_n^{**}:

$$H_n^*(f;\ x)=\frac{1}{\operatorname{ch}(nx)}\sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{2k+1}{n}\right)\frac{(nx)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$(x\in\mathbf{R},\quad n=1,\ 2,\ldots)$$

$$H_n^{**}(f;\ x)=\frac{1}{\operatorname{ch}(nx)}\sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{2k}{n}\right)\frac{(nx)^{2k}}{(2k)!}$$

(falls die Reihen konvergent sind).

Die Operatoren H_n^* scheinen nicht nützlich zu sein, denn für $f(t)=1$ $(t\in\mathbf{R})$ gilt die Gleichung $H_n^*(f;\ x)=\operatorname{th}(nx)$; also gilt $H_n^*(f;0)\to(0)$ nicht, und die Konvergenz $H_n(f)\to f$ $(n\to\infty)$ ist auf den Intervallen $(0;\ b)$ nicht gleichmäßig. Trotzdem wird uns H_n^* von Nutzen sein.

Satz 1. *Wir setzen voraus, daß die Funktion f der Bedingung $|f(t)|\leq Mt^{\lambda t}$ $(t>0)$ genügt, und in jedem Punkt $x\in[a,\ b]$ stetig ist (hierbei sind $M,\ \lambda,\ a,\ b$ reelle Zahlen, $M,\ \lambda>0$, $0\leq a<b$). Dann gelten die folgenden Aussagen*:

(1a) $H_n^{**}(f)\to f$ $(n\to\infty)$ *gleichmäßig auf* $[a,\ b]$.

(1b) *Ist* $a>0$, *so gilt*

$H_n^*(f)\to f$ $(n\to\infty)$ *gleichmäßig auf* $[a,\ b]$.

(1c) *Ist* $a=0$, *und* $f(0)=0$, *so gilt*

$H_n^*(f)\to f$ $(n\to\infty)$ *gleichmäßig auf* $[a,\ b]=[0,\ b]$.

Zum Beweis des Satzes wenden wir die folgenden Hilfssätze an:

Hilfssatz 1 [1]. *Es sei $\lambda>0$. Zu jeder natürlichen Zahl $A>0$ existieren positive Zahlen $K,\ c$ mit folgender Eigenschaft*:

$$e^{-nx}\sum_{k=2An}^{\infty}(k/n)^{\lambda k/n}\frac{(nx)^k}{k!}\leq Ke^{-cn}\quad(0\leq x\leq A). \tag{1}$$

Aus (1) folgt sofort (2):

$$e^{-nx}\sum_{k=2An}^{\infty}\frac{(nx)^k}{k!}\leq Ke^{-cn}\quad(0\leq x\leq A). \tag{2}$$

Hilfssatz 2. *Es sei I die identische Abbildung*: $I(t)=t$ $(t\in\mathbf{R})$. *Damit gilt:*

$$H_n^*(1;\ x)=\operatorname{th}(nx),\quad H_n^*(I;\ x)=x,\quad H_n^*(I^2;\ x)=x^2\operatorname{th}(nx)+\frac{x}{n}, \tag{3}$$

$$H_n^{**}(1;\ x)=1,\quad H_n^{**}(I;\ x)=x\operatorname{th}(nx),\quad H_n^{**}(I^2;\ x)=x^2+\frac{x}{n}\operatorname{th}(nx) \tag{4}$$

$$(x\in\mathbf{R},\quad n=1,\ 2,\ldots).$$

(Die Richtigkeit der Behauptungen (3) und (4) kann durch direkte Rechnungen nachgeprüft werden.)

H i l f s s a t z 3. *Wir nehmen an, daß die Funktion* $F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ *im Intervall* $[0, b]$ *beschränkt, im Punkt* 0 *stetig ist und* $F(0)=0$ *gilt. Ferner setzen wir* $G_n(x)=1-\operatorname{th}(nx))$ $(x\in\mathbf{R},\ n=1, 2, \ldots)$. *Dann besteht die Konvergenz* $F\cdot G_n\to 0$ $(n\to\infty)$ *gleichmäßig auf* $[0, b]$.

B e w e i s. Es sei $\varepsilon>0$. Auf Grund der Bedingungen existiert ein $\delta>0$ so, daß aus $0\leq x\leq\delta$ die Ungleichung $|F(x)|<\varepsilon$ folgt. Wegen $0\leq G_n(x)<1$ $(x\geq 0,\ n=1, 2, \ldots)$ erhalten wir

$$|F(x)G_n(x)|<\varepsilon \quad (0\leq x\leq\delta,\ n=1, 2, \ldots).$$

Es sei jetzt $\delta<x\leq b$. Dann gilt für alle n $|F(x)(1-\operatorname{th}(nx))|\leq|F(x)|(1-\operatorname{th}(n\delta))$. Es gibt eine Zahl $K_1>0$ mit $|F(x)|\leq K_1$ $(0\leq x\leq b)$ und eine Zahl n_0 mit $1-\operatorname{th}(n\delta)<\varepsilon/K_1$ $(n>n_0)$. Somit gilt $|F(x)G_n(x)|<\varepsilon$ $(\delta<x\leq b,\ n>n_0)$.

Wir führen noch die folgenden Bezeichnungen ein:

$$f_b(t)=\begin{cases} f(t), & t\leq 2b+2;\\ f(2b+2), & t>2b+2;\end{cases}$$

$$\tilde{f}_b(t)=f(t)-f_b(t), \quad (t\in\mathbf{R}).$$

B e w e i s d e s S a t z e s 1.

(1a) Wegen $f=f_b+\tilde{f}_b$, $f(t)=f_b(t)$ $(0\leq t\leq b)$ und wegen der Linearität von H_n^{**} gilt

$$H_n^{**}(f)-f=H_n^{**}(f_b+\tilde{f}_b)-f=H_n^{**}(f_b)-f_b+H_n^{**}(\tilde{f}_b) \quad (\text{auf } [0, b]).$$

Aus (4) folgt sofort (siehe auch Hilfssatz 1), daß $H_n^{**}(1)\to 1$, $H_n^{**}(I)\to I$, $H_n^{**}(I^2)\to I^2$ $(n\to\infty)$ gleichmäßig auf $[a, b]$. Die linearen Operatoren H_n^{**} sind positiv, f_b ist eine beschränkte Funktion, die in jedem Punkt $x\in[a, b]$ stetig ist, somit folgt aus dem Satz von K o r o v k i n [2]: $H_n^{**}(f_b)\to f_b$ $(n\to\infty)$ gleichmäßig auf $[a, b]$.

Wir müssen noch beweisen, daß die Folge $H_n^{**}(\tilde{f}_b)$ gleichmäßig auf $[a, b]$ gegen 0 konvergiert. Wegen $\tilde{f}_b(t)=0$ $(0\leq t\leq 2b+2)$ und $\tilde{f}_b(t)=f(t)-f(2b+2)$ $(t\geq 2b+2)$ erhalten wir für alle $x\in[a, b]$:

$$|H_n^{**}(\tilde{f}_b;x)|\leq\left|\frac{1}{\operatorname{ch}(nx)}\sum_{\frac{2k}{n}\geq 2b+2}\left[f\left(\frac{2k}{n}\right)-f(2b+2)\right]\frac{(nx)^{2k}}{(2k)!}\right|$$

$$\leq\frac{1}{\operatorname{ch}(nx)}\sum_{\frac{j}{n}\geq 2b+2}\left(\left|f\left(\frac{j}{n}\right)\right|+|f(2b+2)|\right)\frac{(nx)^j}{j!}$$

$$\leq\frac{e^{nx}}{\operatorname{ch}(nx)}e^{-nx}\sum_{\frac{j}{n}\geq 2[b+1]}\left(\left|f\left(\frac{j}{n}\right)\right|+|f(2b+2)|\right)\frac{(nx)^j}{j!},$$

wobei $[b+1]=\operatorname{entier}(b+1)$ ist. Aufgrund der Bedingung $|f(t)|\leq Mt^{\lambda t}$ $(t>0)$ und des Hilfssatzes 1 existieren positiven Zahlen K, c mit folgender Eigenschaft: $|H_n^{**}(\tilde{f}_b;\ x)|\leq Ke^{-cn}$ $(0\leq x\leq[b+1])$, damit ist unsere Behauptung bewiesen.

(1b) Der Beweis der Aussage (1b) erfolgt durch eine analoge Wiederholung des Beweises von (1a). Die Bedingung $a>0$ benötigen wir, weil (mit $b>0$) nur für $a>0$ gilt: $H_n^*(1)\to 1$ $(n\to\infty)$ gleichmäßig auf $[a, b]$.

(1c) Wie im Beweis von (1a) bzw. (1b) erhalten wir

$$H_n^*(f)-f=H_n^*(f_b)-f_b+H_n^*(\tilde{f}_b) \quad (\text{auf } [0, b]),$$

und $H_n^*(\tilde{f}_b)\to 0$ $(n\to\infty)$ gleichmäßig auf $[a, b]$.

Es sei $x \in [0, b]$.

$$H_n^*(f_b;\, x)-f_b(x)=\frac{1}{\operatorname{ch}(nx)}\sum_{k=0}^{\infty}\left[f_b\left(\frac{2k+1}{n}\right)-f_b(x)\right]\frac{(nx)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$-f_b(x)\,(1-\operatorname{th}(nx))=:A_n(x)+B_n(x).$$

Nach Hilfssatz 3 gilt $B_n\to 0$ $(n\to\infty)$ gleichmäßig auf $[a, b]$, so müssen wir uns nur noch mit A_n befassen.

$$A_n(x)=\frac{1}{\operatorname{ch}(nx)}\sum_{k=0}^{\infty}\left[f_b\left(\frac{2k+1}{n}\right)-f_b(x)\right]\frac{(nx)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$=\frac{1}{\operatorname{ch}(nx)}\left\{\sum_{j=0}^{\infty}\left[f_b\left(\frac{j}{n}\right)-f_b(x)\right]\frac{(nx)^j}{j!}-\sum_{k=0}^{\infty}\left[f_b\left(\frac{2k}{n}\right)-f_b(x)\right]\frac{(nx)^{2k}}{(2k)!}\right\}$$

$$=\frac{e^{nx}}{\operatorname{ch}(nx)}\left[S_n(f_b;\, x)-f_b(x)\right]-\left[H_n^{**}(f_b;\, x)-f_b(x)\right]=:P_n(x)+Q_n(x).$$

Wegen der im Abschnitt 1 erwähnten Eigenschaft der Szász-Operatoren gilt $P_n\to 0$ $(n\to\infty)$ gleichmäßig auf $[a, b]$. Die auf $[a, b]$ gleichmäßige Konvergenz $Q_n\to 0$ haben wir schon bewiesen (siehe (1a)).

3. Wir verwenden die folgenden Bezeichnungen:

$$\left.\begin{aligned} f^*(t)&=\frac{1}{2}\left[f(t)-f(-t)\right]\\ f^{**}(t)&=\frac{1}{2}\left[f(t)+f(-t)\right]\end{aligned}\right\} \quad (t\in \mathbf{R}).$$

Um unsere Zielsetzung zu verwirklichen, definieren wir die Operatoren H_n

(5) $$H_n(f)=H_n^*(f^*)+H_n^{**}(f^{**}) \quad (f:\mathbf{R}\to\mathbf{R})$$

(falls die rechte Seite existiert). Man kann direkt nachprüfen, daß für alle $x\in\mathbf{R}$ gilt:

(5′) $$H_n(f;\, x)=\frac{1}{e^{nx}+e^{-nx}}\sum_{j=0}^{\infty}\left[f\left(\frac{j}{n}\right)+(-1)^j\cdot f\left(-\frac{j}{n}\right)\right]\frac{(nx)^j}{j!}.$$

Zu Beginn des Abschnittes 2 wurde auf eine ungünstige Eigenschaft der Operatoren H_n^* hingewiesen. Die Operatoren H_n „erben" diese Eigenschaft nicht, da man mit Hilfe von H_n^* nur die Funktion f^* — also eine ungerade Funktion — approximiert. Wegen $f^*(0)=0$ ist die Aussage (1c) anwendbar.

Satz 2. *Wir setzen voraus, daß die Funktion f der Bedingung $|f(t)|\leq M|t|^{\lambda|t|}$ $(t\in\mathbf{R},\ t\neq 0)$ genügt und in jedem Punkt $x\in[-b, b]$ stetig ist (M, λ, b positive Zahlen). Dann gilt:*

$H_n(f)\to f$ $(n\to\infty)$ gleichmäßig auf $[-b, b]$.

B e w e i s. Auf Grund der Voraussetzungen genügt die Funktion f^* bzw. f^{**} den Bedingungen des Satzes (1c) bzw. (1a), demnach erhalten wir:

$$H_n^*(f^*) \to f^*, \quad H_n^{**}(f^{**}) \to f^{**} \quad (n \to \infty) \tag{6}$$

gleichmäßig auf $[0, b]$. Die Funktionen $H_n^*(f^*)$ und f^* sind ungerade, $H_n^{**}(f^{**})$ und f^{**} sind gerade Funktionen, folglich gilt (6) auch auf $[-b, b]$ gleichmäßig. Daraus und aus $f^*+f^{**}=f$ ergibt sich schon die Behauptung.

4. B e m e r k u n g e n. 1. Aus (3), (4) und (5) folgt

$$H_n(1;x)=1, \quad H_n(I, x)=x, \quad H_n(I^2;x)=x^2+\frac{x}{n}\,\mathrm{th}\,(nx)\,(x \in \mathbf{R},\ n=1, 2, \dots),$$

und somit gilt $H_n(1) \to 1$, $H_n(I) \to I$, $H_n(I^2) \to I^2$ $(n \to \infty)$ auf jedem endlichen Intervall gleichmäßig. Aus dieser Tatsache folgt jedoch die Behauptung des Satzes 2 nicht, denn eine Bedingung des Korovkin-Satzes ist nicht erfüllt: die Operatoren H_n sind nicht positiv.

2. Würden wir im Satz 2 anstelle von $[-b, b]$ ein beliebiges Intervall $[a, b]$ schreiben, so wäre die Behauptung des Satzes falsch. Die Symmetrie bezüglich 0 des Intervalls wurde in unserem Beweis ausgenutzt, als wir aus der Stetigkeit der Funktion f auf die Stetigkeit der Funktionen f^* und f^{**} in dem gleichen Intervall schlossen.

LITERATURVERZEICHNIS

1. T. H e r m a n n. Approximation of unbounded functions on unbounded interval. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **29**, 1977, 393-398.
2. P. P. K o r o v k i n. Linear Operators and Approximation Theory. Delhi, 1960, 28-30.

Universität für Chemische Industrie Veszprém
Lehrstuhl für Mathematik
H-8201 Veszprém, Pf. 158 *Ungarn*

Eingegangen am 3. Juni 1981