КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ'81
София, 1983, с. 344—348

CONSTRUCTIVE FUNCTION THEORY'81
Sofia, 1983, p. 344—348

# SPLINE-FUNKTION UND DAS CAUCHY-PROBLEM

**J. Győrvári**

Betrachten wir das Cauchy-Problem: $y''=f(x, y, y'), y(a)=y_0, \; y'(a)=y'_0$.

Dieses Problem besitzt eine eindeutige Lösung im Intervall $[a, b]$, wenn die nachstehenden Bedingungen erfüllt sind:

1) Die Funktion $f(x, y, y')$ ist stetig (d. h. $y''(x) \in C^0[a, b]$).

2) Die Lipschitz-Bedingung ist erfüllt, das heißt $|f(x, y_2, y'_2)-f(x, y_1, y'_1)| \leq L\cdot(|y_2-y_1|+|y'_2-y'_1|)$ wo $a \leq x \leq b$ und $y_1, y_2, y'_1, y'_2$ beliebige Variablen sind.

In der vorliegenden Arbeit definieren wir die Spline-Funktion und mit Hilfe deren geben wir eine numerische Lösung des Cauchy-Problems.

**1. Die Definition der Spline-Funktion.** Es sei $x_0=a$; $x_k=a+k(b-a)/n$ $h=x_k-x_{k-1}$; $y(x_k)=y_k$; $y'(x_k)=y'_k$; $y''(x_k)=y''_k$.

D e f i n i t i o n.

$$1) \qquad S_\Delta(x):=\begin{cases} S_0(x) & \text{für} \quad x_0 \leq x \leq x_1, \\ S_k(x) & \text{für} \quad x_k \leq x \leq x_{k+1} \quad (k=1, 2, \ldots, n-1) \end{cases}$$

wo $S_0(x):=y_0+y'_0\cdot(x-x_0)+f(x_0, y_0, y'_0)\cdot(x-x_0)^2/2$,

$$S_k(x):=S_{k-1}(x_k)+S'_{k-1}(x_k)\cdot(x-x_k)+f(x_k, S_{k-1}(x_k), S'_{k-1}(x_k))\cdot(x-x_k)^2/2.$$

Es ist leicht zu beweisen, daß $S_{k-1}(x_k)=S_k(x_k)$, $S'_{k-1}(x_k)=S'_k(x_k)$, das heißt $S_\Delta(x) \in C^1[a, b]$.

**2. Probleme der Konvergenz.** Das Ziel der Untersuchungen ist die Approximation der Lösung des Cauchy-Problems mit Hilfe der in (1) definierten Spline-Funktionen. Ausserdem wird die Ordnung der Approximation untersucht.

Zur Beweis benutzen wir oft die nachstehenden Taylor-Formeln, die sich aus der Bedingung $y(x) \in C^2[a, b]$ ergeben:

$$y(x)=y_k+y'_k\cdot(x-x_k)+y''(\xi_k)\cdot(x-x_k)^2/2, \text{ wenn } x_k<\xi_k<x \leq x_{k+1}$$

$$y'(x)=y'_k+y''(\eta_k)\cdot(x-x_k), \text{ wenn } x_k<\eta_k<x \leq x_{k+1} \quad (k=0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

Definition.

$$e_k := |y_k - S_k(x_k)| \qquad (k=0, 1, 2, \dots, n-1),$$
$$e'_k := |y'_k - S'_k(x_k)| \qquad (k=0, 1, 2, \dots, n-1),$$
$$e_n := |y_n - S_{n-1}(x_n)|,$$
$$e'_n := |y'_n - S'_{n-1}(x_n)| .$$

Lemma 2.1. $e_{k+1} \leqq e_k \cdot (1+C_1 h^2) + C_2 h e'_k + h^2 \omega_2(h^2)/2$ *für* $k=0, 1, 2, \dots, n-1$, *wo* $\omega_2(h) = \sup\limits_{|x-x_1| \leqq h} |y''(x) - y''(x_1)|$.

Beweis. Es sei $x_k \leqq x \leqq x_{k+1}$ $(k=0, 1, 2, \dots, n-2)$. Dann ist:

$$|y(x) - S_k(x)| = |y_k + y'_k \cdot (x - x_k) + y''(\xi_k) \cdot (x - x_k)^2/2 - S_{k-1}(x_k)$$
$$- S'_{k-1}(x_k) \cdot (x - x_k) - f(x_k, S_{k-1}(x_k), \ S'_{k-1}(x_k)) \cdot (x - x_k)^2/2|$$
$$\leqq |y_k - S_{k-1}(x_k)| + h \cdot |y'_k - S'_{k-1}(x_k)| + h^2 \cdot y''(\xi_k) - y''(x_k) + y''(x_k)$$
$$- f(x_k, S_{k-1}(x_k); \ S'_{k-1}(x_k))|/2 \leqq |y_k - S_k(x_k)| + h \cdot |y'_k - S'_k(x_k)| + h^2 \omega_2(h)/2$$
$$+ h^2 \cdot |f(x_k, y_k, y'_k) - f(x_k, S_k(x_k), S'_k(x_k))|/2$$
$$\leqq e_k + h e'_k + h^2 \omega_2(h)/2 + h^2 L \cdot (e_k + e'_k)/2 = e_k \cdot (1 + L h^2/2)$$
$$+ e'_k \cdot (h + L h^2/2) + h^2 \omega_2(h)/2.$$

Bei $x = x_{k+1}$

$$|y(x_{k+1}) - S_k(x_{k+1})| = |y_{k+1} - S_{k+1}(x_{k+1})|$$
$$= e_{k+1} \leqq e_k \cdot (1 + C_1 h^2) + C_2 e'_k h + h^2 \omega_2(h)/2.$$

Der Beweis kann auch für $k=0$ and $k=n-1$ ähnlicherweise durchgeführt werden

Lemma 2.2. $e'_{k+1} \leqq e_k L h + e'_k \cdot (1 + Lh) + h \omega_2(h)$ *für* $k=0, 1, 2, \dots, n-1$

Beweis. Es sei $x_k \leqq x \leqq x_{k+1}$ $(k=1, 2, \dots, n-2)$; dann ist:

$$|y'(x) - S'_k(x)| = |y'_k + y''(\eta_k) \cdot (x - x_k) - S'_{k-1}(x_k)$$
$$- f(x_k, \ S_{k-1}(x_k), \ S'_{k-1}(x_k)) \cdot (x - x_k)|$$
$$\leqq |y'_k - S'_{k-1}(x_k)| + h \cdot \ y''(\eta_k) - y''(x_k) + y''(x_k) - f(x_k, S_{k-1}(x_k), S'_{k-1}(x_k))|$$
$$\leqq e'_k + h \omega_2(h) + h \cdot |f(x_k, y_k, y'_k) - f(x_k, S_k(x_k), S'_k(x_k))|$$
$$\leqq e'_k + h \omega_2(h) + hL \cdot (e_k + e'_k) = L h e_k + (1 + Lh) e'_k + h \omega_2(h).$$

Bei $x = x_{k+1}$: $e'_{k+1} \leqq L h e_k + e'_k \cdot (1 + Lh) + h \omega_2(h)$.

Der Beweis kann auch für $k=0$ und $k=n-1$ ähnlicherweise durchgeführt werden.

Lemma 2.3. $e'_{k+1} \leqq C_3 e_{r_0} + C_4 \omega_2(h)$ *für* $k=0, 1, 2, \dots, n-1$, *wo* $e_{r_0} = \max\{e_0, e_1, e_2, \dots, e_k\}$ *und* $0 \leqq r_0 \leqq k$.

Beweis. Wenden wir das Lemma 2.2. mehrmals an, dann bekommen wir folgende Ungleichungen:

$$e'_{k+1} \leqq e_k L h + e'_k \cdot (1 + Lh) + h \omega_2(h),$$

$$e'_k\cdot(1+Lh)\leqq e_{k-1}\,Lh\cdot(1+Lh)+e'_{k-1}\cdot(1+Lh)^2+h\,\omega_2(h)\cdot(1+Lh),$$
$$e'_{k-1}\cdot(1+Lh)^2\leqq e_{k-2}\,Lh\cdot(1+Lh)^2+e'_{k-2}\cdot(1+Lh)^3+h\,\omega_2(h)\cdot(1+Lh)^2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$e'_1\cdot(1+Lh)^k\leqq e_0\,Lh\cdot(1+Lh)^k+e'_0\cdot(1+Lh)^{k+1}+h\,\omega_2(h)\cdot(1+Lh)^k.$$

Addieren wir diese Ungleichungen, so bekommen wir:

$$e'_{k+1}\leqq Lh\sum_{j=0}^{k}e_j\cdot(1+Lh)^{k-j}+e'_0\cdot(1+Lh)^{k+1}+h\,\omega_2(h)\sum_{j=0}^{k}(1+Lh)^j,$$

$$e'_{k+1}\leqq Lhe_{r_0}\frac{(1+Lh)^{k+1}-1}{Lh}+h\,\omega_2(h)\frac{(1+Lh)^{k+1}-1}{Lh},$$

wo $e_{r_0}=\max\{e_0,e_1,e_2,\ldots,e_k\}$ und $0\leqq r_0\leqq k$.

Auf Grund der Ungleichung

$$(1+Lh)^{k+1}=(1+L\frac{b-a}{n})^{k+1}\leqq(1+L\frac{b-a}{n})^n\leqq e^{L\cdot(b-a)}=\text{const}$$

bekommen wir das Lemma 2.3.

L e m m a 2.4. *$e_{k+1}\leqq e_{r_0}(1+C_6h)+C_5h\,\omega_2(h)$ für $k=0,1,2,\ldots,n-1$, wo $e_{r_0}=\max\{e_0,e_1,e_2,\ldots,e_k\}$ und $0\leqq r_0\leqq k$.*

B e w e i s. Wenden wir die Lemmata 2.1. und 2.3. an, dann bekommen wir Lemma 2.4.

L e m m a 2.5. *$e'_{r_0}\leqq C_7e_{r_1}+C_8\omega_2(h)$, wo $e'_{r_0}=\max\{e'_0,e'_1,e'_2,\ldots,e'_k\}$, $0\leqq r_0\leqq k$, und $e_{r_1}=\max\{e_0,e_1,e_2,\ldots,e_{r_0-1}\}$, $0\leqq r_1\leqq r_0-1$.*

B e w e i s. Lemma 2.5. ergibt sich aus Lemma 2.3.

L e m m a 2.6. *$e_{r_0}\leqq e_{r_1}(1+C_9h)+C_{10}h.\omega_2(h)$, wo $e_{r_0}=\max\{e_0,e_1,e_2,\ldots,e_k\}$, $0\leqq r_0\leqq k$, und $e_{r_1}=\max\{e_0,e_1,e_2,\ldots,e_{r_0-1}\}$, $0\leqq r_1\leqq r_0-1$.*

B e w e i s. Aus Lemma 2.1. folgt $e_{r_0}\leqq e_{r_0-1}\cdot(1+C_{11}h^2)+C_{12}he'_{r_0-1}+C_{13}h^2\omega_2(h)\leqq e_{r_1}\cdot(1+C_{11}h^2)+C_{12}he'_{r_0-1}+C_{13}h^2\omega_2(h)$.

Aus Lemma 2.5. folgt $e'_{r_0-1}\leqq C_7e_{r_1^*}+C_8\omega_2(h)$, wo $e_{r_1^*}=\max\{e_0,e_1,e_2,\ldots,e_{r_0-2}\}$, $0\leqq r_1^*\leqq r_0-2$.

Wenn wir die Ungleichung $e_{r_1^*}\leqq e_{r_1}$ anwenden, bekommen wir: $e'_{r_0-1}\leqq C_7e_{r_1}+C_8\omega_2(h)$. Mit Hilfe dieser Ungleichung erhält man:

$$\begin{aligned}e_{r_0}&\leqq e_{r_1}\cdot(1+C_{11}h^2)+C_{12}h\{C_7e_{r_1}+C_8\omega_2(h)\}+C_{13}h^2\omega_2(h)\\&\leqq e_{r_1}\cdot(1+C_9h)+C_{10}h\,\omega_2(h).\end{aligned}$$

S a t z 2.1. *$e_{k+1}\leqq C_{14}\omega_2(h)$ für $k=0,1,2,\ldots,n-1$, wo*

$$\omega_2(h)=\sup_{|x-x_1|\leqq h}|y''(x)-y''(x_1)|.$$

B e w e i s. Laut Lemma 2.4.: $e_{k+1}\leqq e_{r_0}\cdot(1+C_6h)+C_5h\,\omega_2(h)$, wo $e_{r_0}=\max\{e_0,e_1,e_2,\ldots,e_k\}$, $0\leqq r_0\leqq k$ und $k=0,1,2,\ldots,n-1$.

Laut Lemma 2.6.

$$e_{r_0}\leqq e_{r_1}\cdot(1+C_9h)+C_{10}h\,\omega_2(h)$$

wo $e_{r_1}=\max\{e_0,e_1,e_2,\ldots,e_{r_0-1}\}$, $0\leqq r_1\leqq r_0-1$;

$$e_{r_1}\leqq e_{r_2}\cdot(1+C_1^*h)+C_1^{**}h\,\omega_2(h),$$

wo $e_{r_2}=\max\{e_0, e_1, e_2, \ldots, e_{r_1-1}\}$, $0\leq r_2\leq r_1-1$;

$$e_{r_2}\leq e_{r_3}\cdot(1+C_2^* h)+C_2^{**} h\omega_2(h),$$

wo $e_{r_3}=\max\{e_0, e_1, e_2, \ldots, e_{r_2-1}\}$, $0\leq r_3\leq r_2-1$,

und so weiter, endlich

$$e_{r_s}\leq e_{r_{s+1}}\cdot(1+C_s^* h)+C_s^{**} h\,\omega_2(h),$$

wo $e_{r_s}=\max\{e_0, e_1\}$, $0\leq r_s\leq 1$, und $e_{r_{s+1}}=\max\{e_0\}=e_0=0$.

Es sei $C_{11}=\max\{C_6, C_9, C_1^*, C_2^*, \ldots, C_s^*\}$ und $C_{12}=\max\{C_5, C_{10}, C_1^{**}, C_2^{**}, \ldots, C_s^{**}\}$. Dann bekommen wir die folgenden Ungleichungen (ähnliche wie im Beweis des Lemmas 2.3.):

$$e_{k+1}\leq e_{r_0}\cdot(1+C_{11} h)+C_{12} h\,\omega_2(h),$$

$$e_{r_0}\cdot(1+C_{11} h)\leq e_{r_1}\cdot(1+C_{11} h)^2+C_{12} h\,\omega_2(h)(1+C_{11} h),$$

$$e_{r_1}\cdot(1+C_{11} h)^2\leq e_{r_2}\cdot(1+C_{11} h)^3+C_{12} h\,\omega_2(h)(1+C_{11} h)^2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$e_{r_s}\cdot(1+C_{11} h)^{s+1}\leq e_{r_{s+1}}\cdot(1+C_{11} h)^{s+2}+C_{12} h\,\omega_2(h)(1+C_{11} h)^{s+1}.$$

Addieren wir diese Ungleichungen, bekommen wir:

$$e_{k+1}\leq e_{r_{s+1}}\cdot(1+C_{11}h)^{s+2}+C_{12} h\,\omega_2(h)\sum_{j=0}^{s+1}(1+C_{11} h)^j$$

$$e_{k+1}\leq C_{12} h\,\omega_2(h)((1+C_{11} h)^{s+2}-1)/C_{11} h,$$

$$e_{k+1}\leq C_{14}\,\omega_2(h).$$

Satz 2.2. $e'_{k+1}\leq C_{15}\,\omega_2(h)$ *für* $k=0, 1, 2, \ldots, n-1$, *wo*

$$\omega_2(h)=\sup_{|x-x_1|\leq h}|y''(x)-y''(x_1)|.$$

Beweis. Wenden wir die Lemmata 2.3. und 2.1. an, dann bekommen wir Satz 2.2.

Satz 2.3. $e''_k:=|y''_k-S''_k(x_k)|\leq C_{16}\,\omega_2(h)$ *für* $k=0, 1, 2, \ldots, n-1$, $e''_n:=|y''_n-S''_{n-1}(x_n)|\leq C_{16}\,\omega_2(h)$, *wo* $\omega_2(h)=\sup\limits_{|x-x_1|\leq h}|y''(x)-y''(x_1)|$.

Beweis. Es sei $x_k\leq x\leq x_{k+1}$ $(k=1, 2, \ldots, n-2)$. Dann ist:

$$|y''(x)-S''_k(x))|=|y''(x)-y''(x_k)+y''(x_k)-f(x_k, S_{k-1}(x_k), S'_{k-1}(x_k))|$$

$$\leq\omega_2(h)+|f(x_k, y_k, y'_k)-f(x_k, S_k(x_k), S'_k(x_k))|$$

$$\leq\omega_2(h)+L\cdot\{|y_k-S_k(x_k)|+|y'_k-S'_k(x_k)|\}\leq\omega_2(h)+Le_k+Le'_k.$$

Bei $x=x_k$ $(k=1, 2, \ldots, n-2)$, $e''_k=|y''(x_k)-S''_{k_j}(x_k)|\leq\omega_2(h)+Le_k+Le'_k$

$$\leq C_{16}\,\omega_2(h).$$

Der Beweis kann für $k=0$ und $k=n-1$ ähnlicherweise durchgeführt werden.

Satz 2.4. $|y(x)-S_\Delta(x)|\leq K\omega_2(h)$, $|y'(x)-S'_\Delta(x)|\leq K_1\omega_2(h)$, $|y''(x)-S''_\Delta(x)|$ $\leq K_2\,\omega_2(h)$, *wo* $\omega_2(h)=\sup\limits_{|x-x_1|\leq h}|y''(x)-y''(x_1)|$.

Beweis. Wenden wir die Sätze 2.1. und 2.2. und die folgenden Ungleichungen

$$|y(x)-S_k(x)| \leq e_k\cdot\left(1+\frac{L}{2}\cdot h^2\right)+e_k'\cdot(h+Lh^2/2)+h^2\,\omega_2(h)/2,$$

$$|y'(x)-S_k'(x)| \leq e_k\,Lh+e_k'\cdot(1+Lh)+h\,\omega_2(h),$$

$$|y''(x)-S_k''(x)| \leq e_k\,L+e_k'\,L+\omega_2(h)$$

an, dann bekommen wir Satz 2.4.

Wir werden jetzt zeigen, daß die durch (1) definierte Spline-Funktion die Differentialgleichung $y''=f(x, y, y')$ befriedigt, wenn $n\to\infty$ (das heißt $h\to 0$).

Satz 2.5. *Es sei* $S_\Delta(x)$ *die durch* (1) *definierte Spline-Funktion und* $S_\Delta^*(x):=f(x, S_\Delta(x), S_\Delta'(x))$; *ferner* $f(x, y, y')\in \mathrm{Lip}_L\,1$. *Dann ist*

$$|S_\Delta''(x)-S_\Delta^*(x)| \leq K_3\omega_2(h), \quad wo \quad \omega_2(h)=\sup_{|x-x_1|\leq h}|y''(x)-y''(x_1)|.$$

Beweis. Wenden wir den Satz 2.4. und die Bedingung $f\in\mathrm{Lip}_L 1$ an, dann bekommen wir den Satz 2.5. Es sei $x_k\leq x\leq x_{k+1}$ $(k=0, 1, 2, \ldots, n-1)$. Dann ist:

$$|S_\Delta''(x)-S_\Delta^*(x)|=|S_k''(x)-f(x, S_k(x), S_k'(x))|\leq|S_k''(x)-y''(x)|+|y''(x)$$
$$-f(x, S_k(x), S_k'(x))|\leq K_2\,\omega_2(h)+|f(x, y, y')-f(x, S_k(x), S_k'(x))|\leq K_2\,\omega_2(h)$$
$$+L\cdot\{|y(x)-S_k(x)|+|y'(x)-S_k'(x)|\}\leq K_3\,\omega_2(h).$$

Bemerkung. Aus dem Satz 2.5. ergibt sich, daß $S_\Delta''(x)\approx f(x, S_\Delta(x), S_\Delta'(x))$, wenn $n\to\infty$.

*Universität für Chemische Industrie Veszprém*
*Lehrstuhl für Mathematik*
*H-8201 Veszprém, Pf. 158* *Ungarn*

*Eingegangen am 3. Juni 1981*