КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ'81
София, 1983, с. 351—356

CONSTRUCTIVE FUNCTION THEORY'81
Sofia, 1983, p. 351—356

AUSGEWÄHLTE SPLINEFUNKTIONEN

L. G. Iliev

Zusammenfassung. Es werden Spline von Laguer'schen ganzen Funktionen betrachtet.

1. Es seien $x_0<x_1<\cdots<x_s$ und y_k, $k=0, 1, 2, \dots, s$, reelle Zahlen, $y_0<y_1>y_2<y_3>\cdots$

1.1. Falls $F(x)=\frac{1}{2a}x^2=\frac{a}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^2$, betrachten wir die Menge der Parabeln $y=\eta+\frac{1}{2a}(x-\xi)^2$, wo $a\neq 0$, ξ und η reelle Parameter sind.

Weiter sei $(a_1>0)$

$$y=\eta_k+\frac{1}{2a_k}(x-\xi_k)^2,\quad x_{k-1}<\xi_k<x_k,\quad k=1, 2, \dots, s-1, \tag{1.1}$$

eine Parabel aus dieser Menge durch die Punkte (x_{k-1}, y_{k-1}) und (x_k, y_k) Gesucht sei die Parabel

$$y=\eta_{k+1}+\frac{1}{2a_{k+1}}(x-\xi_{k+1})^2,\quad x_k<\xi_{k+1}<x_{k+1}, \tag{1.2}$$

welche durch die Punkte (x_k, y_k), (x_{k+1}, y_{k+1}) geht und die Parabel (1.1) im Punkt (x_k, y_k) tangiert.

Die Bedingungen, welche die Parameter a_{k+1}, ξ_{k+1} und η_{k+1} bestimmen sind:

$$\begin{gathered} y_k=\eta_{k+1}+\frac{1}{2a_{k+1}}(x_k-\xi_{k+1})^2, \\ y_{k+1}=\eta_{k+1}+\frac{1}{2a_{k+1}}(x_{k+1}-\xi_{k+1})^2, \\ \frac{x_k-\xi_{k+1}}{a_{k+1}}=\frac{x_k-\xi_k}{a_k}. \end{gathered} \tag{1.3}$$

Aus der letzten Gleichung von (1.3) folgt, daß $\operatorname{sign} a_{k+1}=-\operatorname{sign} a_k$. Die Gleichungen (1.3) bestimmen eindeutig die Unbekannten.

Die Funktion

$$(1.4) \qquad F_s^{(2)} = \eta_k + \frac{1}{2a_k}(x-\xi_k)^2, \quad x_{k-1} \leq x \leq x_k, \quad k=1, 2, \ldots, s,$$

ist ein quadratischer Spline im Sinne, daß im jeden Intervall $[x_{k-1}, x_k]$ $k=1, 2, \ldots, s$, $\frac{d^2}{dx^2} F_s^{(2)}(x) = \frac{1}{a_k}$ ist.

1.2. Es sei $\mathscr{L}$ ein elastischer, schwerer, biegsamer und nicht dehnbahrer Faden. Mit $\mathscr{E} \geq 0$ bezeichnen wir dessen Elastizitätskoeffizient und mit $P \geq 0$ dessen Gewicht. Gilt $\mathscr{E} \gg P$, werden wir $\mathscr{E}=1$ und $P=0$ annehmen. In diesem Fall hat der Spline (1.4) bei gewissen Bedingungen und Vermuttungen eine mechanische Deutung.

Es sei aber beim Faden $\mathscr{E}=0$ und $P=1$. Dann, wenn an beiden Enden aufgehängt, nimmt er die Form einer Kettenlinie an.

Diese Bemerkung gibt Anlaß, analog wie im Fall 1.1. die Funktion $\Phi(x) = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ zu betrachten, wo $a \neq 0$ eine reelle Zahl und damit auch die Menge der Kettenlinien $y = \eta + a \operatorname{ch} \frac{x-\xi}{a} - a$, wo $a \neq 0$, ξ und η reelle Parameter sind.

Falls $(a_1 > 0)$

$$(1.1') \qquad y = y_k + a_k \operatorname{ch} \frac{x-\xi_k}{a_k} - a_k, \quad x_{k-1} < \xi_k < x_k, \quad k=1, 2, \ldots, s-1,$$

eine Kettenlinie aus dieser Menge ist, die durch die Punkte (x_{k-1}, y_{k-1}) und (x_k, y_k) geht suchen wir die Kettenlinie

$$(1.2') \qquad y = \eta_{k+1} + a_{k+1} \operatorname{ch} \frac{x-\xi_{k+1}}{a_{k+1}} - a_{k+1}, \quad x_k < \xi_{k+1} < x_{k+1},$$

die durch (x_k, y_k), (x_{k+1}, y_{k+1}) geht und die Kettenlinie (1.1′) im Punkte (x_k, y_k) tangiert.

Wir erhalten die Bedingungen

$$y_k = \eta_{k+1} + a_{k+1} \operatorname{ch} \frac{x_k - \xi_{k+1}}{a_{k+1}} - a_{k+1},$$

$$(1.3') \qquad y_{k+1} = \eta_{k+1} + a_{k+1} \operatorname{ch} \frac{x_{k+1} - \xi_{k+1}}{a_{k+1}} - a_{k+1},$$

$$\operatorname{sh} \frac{x_k - \xi_{k+1}}{a_{k+1}} = \operatorname{sh} \frac{x_k - \xi_k}{a_k}.$$

Aus der letzten Gleichung folgt $\frac{x_k - \xi_{k+1}}{a_{k+1}} = \frac{x_k - \xi_k}{a_k}$. In diesem Fall folgt aus den Eigenschaften der Funktion $\operatorname{sh} \frac{x}{a}$, daß das Gleichungsystem (1.3′) eine eindeutige Lösung hat. Außerdem gilt $\operatorname{sign} a_{k+1} = -\operatorname{sign} a_k$.

Setzen wir

$$(1.4') \qquad S_s^0(x) = \eta_k + a_k \operatorname{ch} \frac{x-\xi_k}{a_k} - a_k, \quad x_{k-1} \leq x \leq x_k, \quad k=1, 2, \ldots, s.$$

Wegen der letzten Gleichung in (1.3′) hat die Funktion $S_s^0(x)$ eine stetige Ableitung:

$$\frac{dS_s^0(x)}{dx} = \operatorname{sh}\frac{x-\xi_k}{a_k}, \quad x_k \leqq x \leqq x_{k+1}, \quad k=0, 1, 2, \ldots, s-1, \tag{1.5}$$

überall im Intervall (x_0, x_s).

$S_s^0(x)$ ist eine Splinefunktion, die man durch wiederholte Integration der in $M_k(x_k, y_k)$, $k=1, 2, \ldots, s-1$, unstetigen Funktion

$$\bar{S}_s(x) = -\frac{1}{a_k}\operatorname{ch}\frac{x-\xi_k}{a_k}, \quad x_{k-1} \leqq x < x_k, \quad k=1, 2, \ldots, s, \tag{1.6}$$

erhalten.

Führen wir in den Intervallen (x_{k-1}, x_k) und $(x_k, {}_{x+1})$ entgegengesetzte, aber der x-Achse senkrechte Gravitationsfelder ein, so kann auch $S_s^0(x)$ mechanisch gedeutet werden.

2. Bezeichnen wir mit L die Klasse der ganzen Funktionen, welche Polynome mit nur reellen Nullstellen sind, oder in jedem endlichen Bereich, Grenzen solcher Polynome sind. L' sei die Untermenge der geraden Funktionen in L.

Die Funktionenmenge $f(z) = \varphi(iz)$, wo $\varphi(z) \in L'$ bezeichnen wir mit $\bar{L}$. Man kann annehmen, daß die Funktionen der Klasse $\bar{L}$ nur reelle Koeffizienten haben. Die Nullstellen der Funktionen $f(z) \in \bar{L}$ liegen auf der imaginären Achse.

2.1. Wenn D der Differentialoperator bedeutet und $f(z) \in \bar{L}$, so sind

$$P_n(z) = P_n(z, f) = f(D)z^n, \quad n=0, 1, 2, \ldots, \tag{2.1}$$

die Jensen'schen Polynome der Funktion $f(z)$. Die Nullstellen dieser Polynome liegen auch auf der imaginären Achse. Aus (2.1) folgt

$$P_n'(z) = nP_{n-1}(z), \quad n=1,2,\ldots \tag{2.2}$$

Falls $f(z) \in \bar{L}$, $f(0)>0$, betrachten wir für reelle x die Funktion $R_n(x) = aP_n\left(\frac{x}{a}\right)$ und die Menge der Kurven $y = \eta + aP_n\left(\frac{x-\xi}{a}\right) - aP_n(0)$, wo a, ξ, η reelle Zahlen sind, $n=2m$ $(m=0, 1, 2, \ldots)$ fest.

Unter den Bezeichnungen von Punkt 1., falls $(a_1>0)$

$$y = \eta_k + a_kP_n\left(\frac{x-\xi_k}{a_k}\right) - a_kP_n(0), \quad x_{k-1} < \xi_k < x_k, \tag{2.3}$$

eine Kurve aus dieser Menge ist, welche durch die Punkte (x_{k-1}, y_{k-1}) und (x_k, y_k) geht, suchen wir die Kurve

$$y = \eta_{k+1} + a_{k+1}P_n\left(\frac{x-\xi_{k+1}}{a_{k+1}}\right) - a_{k+1}P_n(0), \quad x_k < \xi_{k+1} < x_{k+1}, \tag{2.4}$$

welche durch (x_k, y_k), (x_{k+1}, y_{k+1}) läuft und die Kurve (2.3) im Punkt (x_k, y_k) tangiert.

Man erhält die Bedingungen

$$y_k = \eta_{k+1} + a_{k+1} P_n\left(\frac{x_n - \xi_{k+1}}{a_{k+1}}\right) - a_{k+1} P_n(0),$$

$$(2.5) \qquad y_{k+1} = \eta_{k+1} + a_{k+1} P_n\left(\frac{x_{k+1} - \xi_{k+1}}{a_{k+1}}\right) - a_{k+1} P_n(0),$$

$$P_n'\left(\frac{x_k - \xi_{k+1}}{a_{k+1}}\right) = P_n'\left(\frac{x_k - \xi_k}{a_k}\right).$$

Aus der letzten Gleichung und der Eigenschaft von $P_n(z)$ folgt, daß $\frac{x_k - \xi_{k+1}}{a_{k+1}} = \frac{x_k - \xi_k}{a_k}$. Aus den Eigenschaften von $P_n(z)$ folgt, daß das System (2.5) eine einzige Lösung hat und $\operatorname{sign} a_{k+1} = -\operatorname{sign} a_k$.

Man setzt

$$(2.6) \quad R_s^n(x) = \eta_k + a_k P_n\left(\frac{x - \xi_k}{a_k}\right) - a_k P_n(0), \quad x_{k-1} \leq x \leq x_k, \quad x = 1, 2, \ldots, s.$$

Wegen der letzten Gleichung in (2.5) hat $R_s^n(x)$ eine stetige Ableitung

$$(2.7) \quad \frac{d}{dx} R_s^n(x) = P_n'\left(\frac{x - \xi_k}{a_k}\right) = n P_{n-1}\left(\frac{x - \xi_k}{a_k}\right), \quad x_{k-1} \leq x \leq x_k, \quad k = 1, 2, \ldots, s,$$

in den Punkten (x_k, y_k), d. h. im ganzen Intervall (x_0, x_s).

Die Funktion $R_s^n(x)$ ist ein Spline, der nach zweifacher Integration der in den Punkten $M_k(x_k, y_k)$, $k = 1, 2, \ldots, s-1$ unstetigen Funktion

$$(2.8) \qquad R_s^{n*}(x) = \frac{n(n-1)}{a_k} P_{n-2}\left(\frac{x - \xi_k}{a_k}\right), \quad x_{k-1} \leq x \leq x_k, \quad k = 1, 2, \ldots, s,$$

entsteht.

2.2. Es sei $f(z) \in \overline{L}$ und $P_n(z)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, deren Jensen'sche Polynome (2.1). Man setze

$$(2.9) \qquad Q_n(z) = z^n P_n\left(\frac{1}{z}\right), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Die Nullstellen von $Q_n(z)$ liegen auf der imaginären Achse. Wie bekannt gilt in jedem endlichen Bereich der Ebene:

$$(2.10) \qquad \lim_{n \to \infty} Q_n\left(\frac{z}{n}\right) = f(z).$$

Wegen der genannten Eigenschaften der Nullstellen von $Q_n(z)$ kann, wie vorher für jedes feste $n = 2m$ eine Funktion

$$(2.11) \qquad S_s^n(f, x) = S_s^n(x) = \eta_k + b_k Q_n^*\left(\frac{x - \xi_k}{b_k}\right) - b_k Q_n^*(0),$$

$$x_{k-1} < \xi_k < x_k, \quad x_{k-1} \leq x \leq x_k, \quad k = 1, 2, \ldots, s, \quad Q_n^*(x) = Q_n\left(\frac{z}{n}\right), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

gefunden werden, wo ξ_k, η_k, b_k, $k = 1, 2, \ldots, s$, bestimmte reelle Zahlen sind und, daß $S_s^n(x)$ im ganzen Intervall (x_0, x_s) stetig differenzierbar ist.

Ähnlich, falls $f(z) \in \overline{L}$ können wir eine Funktion

$$(2.12) \qquad S_s(x, f) = S_s(x) = \overline{\eta}_k + \overline{b}_k f\left(\frac{x-\overline{\xi}_k}{\overline{b}_k}\right) - \overline{b}_k f(0),$$

$$x_{k-1} < \xi_k < x_k, \quad x_{k-1} \leqq x \leqq x_k, \quad k = 1, 2, \ldots, s,$$

finden welche auch im ganzen Intervall stetig differenzierbar ist.

Für $f(z) = a \operatorname{ch} \frac{x}{a} \in \overline{L}$ bekommt man die Funktion $S_s\left(x, a \operatorname{ch} \frac{x}{a}\right) = S_s^0(x)$.

Sind $\overline{P}_n(z) = \overline{P}_n\left(z, a \operatorname{ch} \frac{z}{a}\right)$ die Jensen'schen Polynome von $a \operatorname{ch} \frac{z}{a}$ und $\overline{Q}_n(z) = z^n \overline{P}_n\left(\frac{1}{z}\right)$, $\overline{Q}_n^*(z) = \overline{Q}_n\left(\frac{z}{n}\right)$, $n = 1, 2, \ldots$, finden wir die Funktion

$$(2.13) \qquad \overline{S}_s^n(x) = \overline{S}_s^n\left(x, a \operatorname{ch} \frac{x}{a}\right) = \eta_k + b_k \overline{Q}_n^*\left(\frac{x-\xi_k}{b_k}\right) - b_k \overline{Q}_n^*(0),$$

$$x_{k-1} \leqq x \leqq x_k, \quad k = 1, 2, \ldots, S, \quad n = 2m, \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

In diesem Fall kann man die Frage nach der mechanischen Deutung von $\overline{S}_s^n(x)$ bei $\varepsilon > 0$ und $P > 0$ stellen, ähnlich dem Fall von $S_s^0(x)$ bei $\mathscr{E} = 0$ und $P = 1$.

3. Die ganzen Funktionen der Art

$$(3.1) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{itz} dt,$$

mit nur reellen Nullstellen heißen Riemann'sche ganze Funktionen.

Falls $\varphi(z) \in L'$ und der Art (3.1) ist, so gilt $f(z) = \varphi(iz) \in \overline{L}$ und

$$(3.2) \qquad f(z) = \int_0^{\infty} F(t) \operatorname{ch} tz \, dt.$$

Für die Jensen'schen Polynome von $f(z)$ erhält man

$$(3.3) \qquad P_n(z) = P_n(z, f) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t)(z+t)^n dt, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

wo $F(t) = F(-t)$, $0 \leqq t < \infty$.

Ähnlich gilt

$$(3.4) \qquad Q_n(z) = z^n P_n\left(\frac{1}{z}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t)(1+tz)^n dt, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Die Funktionen der Klasse $\overline{L}$, die der Art (3.2) sind, kann man z. B. in [1, 2, 3] finden.

Als klassisch gelten folgende Resultate von Pólya.

Ist $\psi(t) \geqq 0$ wachsend und integrabel im Intervall [0, 1], so gilt

$$(3.5) \qquad \int_0^1 \psi(t) \operatorname{ch} tz \, dt \in \overline{L}.$$

Die Funktion

$$\int_0^1 (1-t^{2q})^p \operatorname{ch} tz\, dt \in \bar{L} \tag{3.6}$$

und auch

$$\int_0^\infty e^{-t^{2q}} \operatorname{ch} tz\, dt \in \bar{L}, \tag{3.7}$$

falls q eine natürliche Zahl und $p>-1$ ist.

In [1] sind einige Methoden angegeben um Funktionen der Klasse L zu erhalten. Ein konkretes Resultat lautet folgendermaßen:

Es sei $x(t)$ ein gerades Polynom von t oder eine gerade ganze Funktion von t, so daß: $x(a)=0$, $a>0$; $x'(it) \in L$. Dann gilt, bei $\lambda>-1$

$$\int_0^a x^\lambda \operatorname{ch} tz\, dt \in \bar{L}. \tag{3.8}$$

Aus (3.8) erhält man für $x=1-t^{2q}$ den Fall (3.6).

Alle diese Beispiele zeigen, daß die Klasse L viele klassische Funktionen erhält. Die auf diese Weise erhaltenen Splines $S_s^n(x, f)$, $R_s^n(x, f)$ und $S_s(x, f)$ von $f(z) \in \bar{L}$ haben in einigen Fällen mechanische Deutung. Dies ist z. B. der Fall $f(z)=a \operatorname{ch} \frac{t}{a} \in \bar{L}$.

LITERATUR

1. Л. Илиев. Нули на цели функции. София, 1980.
2. G. Polya. Über die Nullstellen gewisser ganzen Funktionen. *Math. Z.*, **2**, 1918, 352-383.
3. G. Polya. Über trigonometrische Integrale mit nur reellen Nullstellen. *J. reine und angew. Math.*, **158**, 1927, 6-18.

Zentrum für Mathematik und Mechanik
1090 Sofia, Postfach 373 Bulgarien

Eingegangen am 5. Juni 1981