КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ'81
*София, 1983, с. 442—446*

CONSTRUCTIVE FUNCTION THEORY'81
*Sofia, 1983, p. 442—446*

# ÜBER DIE METHODE DER INTEGRIERTEN SCHOENBERG-SPLINES

**M. W. Müller**

***Zusammenfassung.*** Die Approximationsgüte des Verfahrens $\{T_{n,k}\}_{n\in N}$ der integrierten Schoenberg-Splines eines festen Grades $k\in N$ zur Approximation von Funktionen $f\in L_p(I)$, $I=[0, 1]$, $1\leq p<\infty$ in der $\|\cdot\|_p$-Norm läßt sich abschätzen durch $\|f-T_{n,k}f\|_p\leq d(r, k)[\|f\|_p|\Delta_n|+\omega_{r,p}(f; |\Delta_n|^{1/r})]$ ($n$ hinreichend groß). Hierbei ist $r\geq 2$, $d(r, k)$ eine von $f$, $n$ und $p$ unabhängige positive reelle Konstante, $|\Delta_n|=\mathrm{Max}_i(x_{i+1}-x_i)$ die Feinheit einer endlichen Zerlegung $\Delta_n$ des Intervalls $I$ und $\omega_{r,p}(f; \cdot)$ der Glättemodul $r$-ter Ordnung von $f$ bezüglich $\|\cdot\|_p$. Die Beweismethode beruht auf einem Glättungsprozeß unter Verwendung des $K$-Funktionals von Peetre

**1.** Das Verfahren der Bernstein-Operatoren auf dem Raum $C(I)$, $I=[0, 1]$ (versehen mit der Maximumnorm $\|\cdot\|_\infty$) ist: positiv, linear und polynominal; besitzt eine Reihe nützlicher gestalterhaltender Eigenschaften, hat aber bekanntlich eine relativ schlechte Approximationsgüte. Lange Zeit suchte man deshalb nach einem Verfahren mit ähnlich angenehmen Eigenschaften, aber mit einer deutlich besseren Approximationsgüte. Dies erreichte Schoenberg [7] durch ein Verfahren, welches approximierende Polynomsplines anstelle von Polynomen verwendet und gleichzeitig das Verfahren der Bernstein-Operatoren als Spezialfall enthält. Sei hierzu $\Delta_n$ eine Knotenverteilung in $I$ bestehend aus $n+1$ Knoten mit $0=x_0<x_1<\ldots<x_n=1$ und der Feinheit $|\Delta_n|:=\mathrm{Max}_i(x_{i+1}-x_i)$. Diese Knotenverteilung wird erweitert durch $x_{-k}=\ldots=x_{-1}=x_0$ und $x_n=x_{n+1}=\ldots=x_{n+k}$, $k\in N$, d. h. die Randknoten $x_0$ und $x_n$ erhalten die Vielfachheit $k+1$. Einer Funktion $f: I\to R$ ordnet der $n$-te Operator $S_{n,k}$ von Schoenberg ($k$ sei im folgenden stets fest) den Polynomspline vom Grad $k$

$$S_{n,k}f(x)=\sum_{j=-k}^{n-1}N_{j,k}(x)f(\xi_{j,k}),\quad x\in I, \tag{1.1}$$

mit Knoten in $x_0,\ldots, x_n$ zu (wobei $x_0$ und $x_n$ jeweils $(k+1)$-fach sind). $f$ wird ausgewertet an den Gitterpunkten $\xi_{j,k}=(x_{j+1}+x_{j+2}+\ldots+x_{j+k})/k$, $j=-k(1)n-1$, für welche offensichtlich gilt: $0=\xi_{-k,k}<\xi_{-k+1,k}<\ldots<\xi_{n-1,k}=1$, die aber (mit Ausnahme der beiden Randgitterpunkte) von den Knoten $x_i$ verschieden sind. Die Gewichtsfunktionen $N_{j,k}$ sind sogenannte normalisierte $B$-Splines, d. h. es ist

$$N_{j,k}(x)=(x_{j+k+1}-x_j)(k+1)^{-1}B_{j,k}(x), \quad x\in I,$$

wobei $B_{j,k}$ ein üblicher $B$-Spline vom Grad $k$ ist mit Knoten in $x_j,\ldots,x_{j+k+1}$. Es gelten die Eigenschaften

$$N_{j,k}\geqq 0, \quad \operatorname{supp} N_{j,k}=[x_j,\ x_{j+k+1}], \quad \int_0^1 B_{j,k}(x)dx=1,$$

$$\sum_{i=-k}^{n-1} N_{j,k}(x)=1, \quad \sum_{j=-k}^{n-1} \xi_{j,k}N_{j,k}(x)=x, \quad x\in I \quad \text{(vgl. etwa [1]).}$$

Im Falle $n=1$ ist $S_{1,k}=B_k$ ($k$-ter Bernstein-Operator), d. h. die Bernstein-Operatoren sind in der Tat spezielle Schoenberg-Operatoren.

Ebenso wie die Bernstein-Operatoren sind auch die Schoenberg-Operatoren positiv und linear, sie lassen lineare Funktionen invariant, und sie sind variationsvermindernd. Für $f\in C(I)$ gilt $\|f-S_{n,k}f\|_\infty\to 0$, falls $|\Delta_n|\to 0$. (In diesem Sinne liegt also ein positives lineares Approximationsverfahren auf $C(I)$ vor). Daß die Approximationsgüte dieses Verfahrens deutlich besser ist als die des Verfahrens der Bernstein-Operatoren zeigt ein Ergebnis von Marsden, Schoenberg [4]: Für $f\in C(I)$ und $|\Delta_n|=1/n$ (d. h. $\Delta_n$ äquidistant) gilt $\|f-S_{n,k}f\|_\infty\leqq c(k)\,\omega(f;\,1/n)$, $c(k)$ eine von $n$ unabhängige Konstante.

**2.** Im weiteren Verlauf der Arbeit wird ein vergleichbares Verfahren zur Approximation von Funktionen $f\in L_p(I)$, $1\leqq p<\infty$, in der $\|\cdot\|_p$-Norm untersucht. Der $n$-te integrierte Operator $T_{n,k}$ von Schoenberg ($k$ weiterhin fest) ordnet $f\in L_p(I)$ den Polynomspline vom Grad $k$ (vgl. [5])

$$T_{n,k}f(x)=\sum_{j=-k}^{n-1} B_{j,k}(x)\int_{\xi_{j-1,k+1}}^{\xi_{j,k+1}} f(t)dt, \quad x\in I \tag{2.1}$$

mit Knoten $x_0,\ldots,x_n$ zu (Randknoten $x_0$ und $x_n$ wieder $(k+1)$-fach); genauer ist $T_{n,k}f=(S_{n,k+1}F)'$, wobei $F$ das unbestimmte Integral von $f$ ist. (2.1) entsteht aus (1.1) dadurch, daß die Punktauswertungen $f(\xi_{j,k})$ ersetzt werden durch Integralmittel von $f$ über geeignete disjunkte Intervalle um die Gitterpunkte $\xi_{j,k}$ (hieraus resultiert die Bezeichnung „integrierter Operator"). Die Operatoren $T_{n,k}$ sind positiv, linear und lassen konstante Funktionen invariant. Mit Standardmethoden zeigt man, daß $\|f-T_{n,k}f\|_p\to 0$ für $|\Delta_n|\to 0$.

Die wirksamste Beweistechnik zur Gewinnung von Aussagen über die Approximationsgüte ist ein Glättungsprozeß, der in folgenden drei Stufen abläuft (vgl. etwa [8]):

(i) $f\in L_p(I)$ wird approximiert durch ein
$g\in L_p^{(r)}(I):=\{f\in L_p(I)\,|\,f^{(r-1)}\in AC(I),\ f^{(r)}\in L_p(I)\}$, $r\in N$;

(ii) $g\in L_p^{(r)}(I)$ wird approximiert durch $T_{n,k}g$;

(iii) die Stufen (i) und (ii) werden gekoppelt mit Hilfe des $K$-Funktionals von Peetre.

**3.** Für das Weitere werden einige Hilfsmittel benötigt. Sei $f\in L_p^{(r)}(I)$, $1\leqq p<\infty$, $r\in N$. Dann gilt

$$\|f^{(k)}\|_p\leqq C(\|f\|_p+\|f^{(r)}\|_p), \quad k=o(1)r-1, \tag{3.1}$$

wobei die positive reelle Konstante $C$ von $k$, $p$ und $f$ unabhängig ist (G o l d b e r g — M e i r [2, Theorem 3.1])

Für $f \in L_p(I)$, $1 \leq p < \infty$ ist der G l ä t t e m o d u l d e r O r d n u n g $r$, $r \in N_0$, erklärt durch $\omega_{r,p}(f; t) := \sup_{0 < h \leq t} \| \Delta_h^r(f, \cdot) \|_p [0, 1-rh]$ $(0 \leq t \leq 1/r)$. Es gilt

$$\omega_{r,p}(f; \lambda t) \leq (1+\lambda)^r \omega_{r,p}(f; t), \quad \lambda > 0, \tag{3.2}$$

$$\omega_{r+k,p}(f; t) \leq 2^k \omega_{r,p}(f; t), \quad k \in N_0. \tag{3.3}$$

Als Spezialfälle eines allgemeinen Konzepts von P e e t r e [6] ergeben sich das $K$-F u n k t i o n a l

$$K_{r,p}(f, t) := \operatorname{Inf} \{ \| f-g \|_p + t(\| g \|_p + \| g^{(r)} \|_p) : g \in L_p^{(r)}(I) \}, \quad t > 0,$$

sowie als Modifikation hiervon das $K'$-F u n k t i o n a l $K'_{r,p}(f, t) := \operatorname{Inf} \{ \| f-g \|_p + t \| g^{(r)} \|_p : g \in L_p^r(I) \}$, $t > 0$. Beide Funktionale sind grob gesprochen Seminormen auf $L_p(I)$, welche die Güte der Approximation an $f$ durch glattere Funktionen $g \in L_p^{(r)}(I)$ messen unter gleichzeitiger Berücksichtigung der Größe $\| g \|_p + \| g^{(r)} \|_p$ bzw. $\| g^{(r)} \|_p$. Man beachte, daß an dieser Stelle die Stufe (i) eingeht. Offensichtlich gilt

$$K'_{r,p}(f, t) \leq K_{r,p}(f, t) \leq \operatorname{Min}(1, t) \| f \|_p + 2K'_{r,p}(f, t), \tag{3.4}$$

und nach J o h n e n [3, Proposition 6.1] existieren positive reelle Konstanten $c_1$, $c_2$ (unabhängig von $f$ und $p$) derart, daß gilt

$$c_1 \omega_{r,p}(f; t) \leq K'_{r,p}(f, t^r) \leq c_2 \omega_{r,p}(f; t) \tag{3.5}$$

für $0 < t \leq 1$. Die Operatoren $T_{n,k}$ sind Kontraktionen auf $L_p(I)$, $1 \leq p < \infty$ (d. h. $\| T_{n,k} \|_p \leq 1$, $n \in N$), und an einer beliebigen und festen Stelle $x \in I$ gilt $T_{n,k}(|t-x|^s)(x) \leq (k+1)^s |\Delta_n|^s$, $s \in N$.

**4.** Eine Aussage über die Approximation glatter Funktionen durch das Verfahren (Stufe (ii)) macht

S a t z 1. *Für $g \in L_p^{(r)}(I)$, $1 \leq p < \infty$, $r \geq 2$, gilt $\| g - T_{n,k} g \|_p \leq c(r, k)(\| g \|_p + \| g^{(r)} \|_p) |\Delta_n|$, wobei $c > 1$ und unabhängig von $g$, $n$ (und $p$) ist.*

B e w e i s. Sei $x \in I$ beliebig und fest. Aufgrund des Satzes von Taylor mit Restglied in Integralform und der indentitätserhaltenden Eigenschaft der Operatoren $T_{n,k}$ erhält man

$$T_{n,k} g(x) - g(x) = \sum_{s=1}^{r-1} \frac{g^{(s)}(x)}{s!} T_{n,k}(t-x)^s(x) + T_{n,k} \Big( \int_x^t \frac{(t-u)^{r-1}}{(r-1)!} g^{(r)}(u) du \Big)(x)$$

$$= \sum_{s=1}^{r-1} I_s(x) + I_r(x).$$

Wegen (3.6) folgt $|I_s(x)| \leq |g^{(s)}(x)| (s!)^{-1} (k+1)^s |\Delta_n|^s$ und hieraus unter Beachtung von (3.1), $\| I_s \|_p \leq C(k+1)^{r-1} (\| g \|_p + \| g^{(r)} \|_p) |\Delta_n|$, $s = 1(1)r-1$. Mit (2.1) und wegen $\| g^{(r)} \|_1 \leq \| g^{(r)} \|_p$ folgt leicht

$$|I_r(x)| \leqq \sum_{j=-k}^{n-1} B_{j,k}(x) \int_{\xi_{j-1,k+1}}^{\xi_{j,k+1}} \left| \int_x^t \frac{(t-u)^{r-1}}{(r-1)!} g^{(r)}(u)du \right| dt$$

$$\leqq \frac{\|g^{(r)}\|_p}{(r-1)!} T_{n,k}(|t-x|^{r-1})(x) \leqq \frac{\|g^{(r)}\|_p}{(r-1)!} (k+1)^{r-1} |\Delta_n|^{r-1}$$

und damit insbesondere $\|I_r\|_p \leqq (k+1)^{r-1}/(r-1)!\ (\|g\|_p + \|g^{(r)}\|_p)|\Delta_n|$. Insgesamt gilt also

$$\|g - T_{n,k}g\|_p \leqq \left[(r-1)C + \frac{1}{(r-1)!}\right](k+1)^{r-1}(\|g\|_p + \|g^{(r)}\|_p)|\Delta_n|$$

$$= : c(r, k)(\|g\|_p + \|g^{(r)}\|_p)|\Delta_n|.$$

Bemerkung zum Fall $r=1$: Hier entfällt $\Sigma_{s=1}^{r-1} I_s(x)$, während $\|I_r\|_p$ nicht in gleicher Weise wie oben abgeschätzt werden kann. Für $1<p<\infty$ ist aber

$$\|g - T_{n,k}g\|_p \leqq (k+1)\|g'\|_p |\Delta_n|$$

(vgl. [5, Theorem 2]) und damit insbesondere

$$\|g - T_{n,k}g\|_p \leqq c(1, k)(\|g\|_p + \|g'\|_p)|\Delta_n|$$

mit $c(1, k) : = k+1$.

Der Fall $p=1$ bleibt offen. (Möglicherweise reicht hier die vorausgesetzte „Glätte" von $g$ nicht aus, um eine Abschätzung zu gewinnen, die sich in das Ergebnis von Satz 1 einordnet.)

Setzt man allerdings für $r=1$, $p=1$ etwas mehr „Glätte" voraus, so erreicht man ebenfalls noch die Approximationsgüte $O(|\Delta_n|)$. Dies zeigt

Satz 2. *Für* $g \in AC(I)$ *mit* $g' \in BV(I)$ *gilt* $\|g - T_{n,k}g\|_1 \leqq (k+1)(\|g'\|_1 + \|g'\|_{BV})|\Delta_n|$.

Beweis. Sei wieder $x \in I$ beliebig und fest. Dann ist $g(t) = g(x) + g'(x)(t-x) + \int_x^t (t-u)dg'(u)$, $t \in I$, und folglich

$$T_{n,k}g(x) - g(x) = g'(x)T_{n,k}(t-x)(x) + T_{n,k}\left(\int_x^t (t-u)dg'(u)\right)(x) = : I_1(x) + I_2(x).$$

Wie im Beweis zu Satz 1 folgt $\|I_1\|_1 \leqq (k+1)\|g'\|_1 |\Delta_n|$.

Wegen $\int_x^t |dg'(u)| \leqq \bigvee_0^1(g')$ und $\|g'\|_{BV} = |g'(0)| + \bigvee_0^1(g')$ ergibt sich mit (2.1) und (3.6) leicht

$$|I_2(x)| \leqq \sum_{j=-k}^{n-1} B_{j,k}(x) \int_{\xi_{j-1,k+1}}^{\xi_{j,k+1}} \left| \int_x^t (t-u)dg'(u) \right| dt$$

$$\leqq \|g'\|_{BV} T_{n,k}(|t-x|)(x) \leqq \|g'\|_{BV}(k+1)|\Delta_n|$$

und damit $\|I_2\|_1 \leqq (k+1)\|g'\|_{BV}|\Delta_n|$. Insgesamt gilt also $\|g - T_{n,k}g\|_1 \leqq (k+1)(\|g'\|_1 + \|g'\|_{BV})|\Delta_n|$.

**5.** Nach diesen Vorbereitungen erhält man nun die gewünschte Aussage über die Approximationsgüte des Verfahrens auf den Räumen $L_p(I)$ (Stufe (iii)).

Satz 3. *Für $f \in L_p(I)$, $1 \leq p < \infty$, $r \geq 2$, und hinreichend großes n gilt*

$$\| f - T_{n,k} f \|_p \leq d(r, k)[\| f \|_p |\Delta_n| + \omega_{r,p}(f; |\Delta_n|^{1/r})],$$

*wobei $d(r, k)$ unabhängig von $f, n$ (und $p$) ist.*

Beweis. Wegen Satz 1 und $\| T_{n,k} \|_p \leq 1$ ist

$$\| h - T_{n,k} h \|_p \leq \begin{cases} 2 \| h \|_p & \text{für} \quad h \in L_p(I) \\ c(r, k)(\| h \|_p + \| h^{(r)} \|_p) |\Delta_n| & \text{für} \quad h \in L_p^{(r)}(I). \end{cases}$$

Für $f \in L_p(I)$ und ein beliebiges $g \in L_p^{(r)}(I)$ folgt dann $\| f - T_{n,k} f \|_p \leq \| (f-g) - T_{n,k}(f-g) \|_p + \| g - T_{n,k} g \|_p \leq 2[\| f - g \|_p + t(\| g \|_p + \| g^{(r)} \|_p)]$ mit $t := c(r, k) |\Delta_n|$. Sei $n$ so groß gewählt, daß $t \leq 1/r$ ist. Bildet man auf der rechten Seite das Infimum über alle $g \in L_p^{(r)}(I)$, so erhält man unter Beachtung der Definition des $K$-Funktionals, sowie von (3.4), (3.5) und (3.2)

$$\| f - T_{n,k} \|_p \leq 2K_{r,p}(f, t) \leq 2[t \| f \|_p + 2K'_{r,p}(f, t)]$$

$$\leq d(r, k)[\| f \|_p |\Delta_n| + \omega_{r,p}(f; |\Delta_n|^{1/r})],$$

wobei $d(r, k) := \mathrm{Max}\,(2c(r, k),\ 4c_2(1 + c(r, k)^{1/r})^r)$ ist.

Bemerkung. Satz 3 gilt auch noch für $r = 1$, falls $p > 1$ ist. Die Gültigkeit für den Fall $r = 1$, $p = 1$ bleibt offen.

## LITERATUR


1. C. de Boor. On calculating with B-splines. *J. Approx. Theory*, **6**, 1972, 50-62.
2. S. Goldberg, A. Meir. Minimum moduli of ordinary differential operators. *Proc. London Math. Soc.*, **23**, 1971, No 1, 1-15.
3. H. Johnen. Inequalities connected with the moduli of smoothness. *Mat. Vesnik*, **9**, 1972, 289-303.
4. M. Marsden, I. J. Schoenberg. On variation diminishing spline approximation methods. *Mathematica*, **8**, 1966, 61-82.
5. M. W. Müller. Degree of $L_p$-approximation by integral Schoenberg-splines. *J. Approx. Theory*, **21**, 1977, 385-393.
6. J. Peetre. A theory of interpolation of normed spaces. Lecture Notes. Brazilia, 1963.
7. I. J. Schoenberg. On variation diminishing approximation methods. — In: On Numerical Approximation (MRC Symposium). Univ. of Wisconsin Press, Madison 1959, 249-274.
8. R. A. de Vore. Degree of approximation. — In: Approximation Theory, II. New York, 1976, 117-161.



*Universität Dortmund*
*Lehrstuhl Mathematik VIII*
*Postfach 500500*
*D-46 Dortmund 50, BRD*



*Eingegangen am 2. Juni 1981*