КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ'81
София, 1983, с. 499—506

CONSTRUCTIVE FUNCTION THEORY'81
Sofia, 1983, p. 499—506

GENAUE BEWERTUNG DER APPROXIMATIONSFUNKTION AUS DER KLASSE $\tilde{H}^{1,1,1}_{A_1,A_2,A_3}$ DURCH DIE FAVARDSUMMEN

V. N. Savić

Zusammenfassung. In dieser Aufgabe ist die genaue Bewertung für

$$\sup_{f \in \tilde{H}^{1,1,1}_{A_1,A_2,A_3}} \|f-\theta_n(f)\|_{\tilde{C}}$$

bekommen worden, und damit sind die Resultate von Stepanec [1] generalisiert.

Es seien $\boldsymbol{N}$ und $\boldsymbol{R}$ die Mengen, mit dieser Rheienfolge, natürlicher und reellen Zahlen, $k \in \boldsymbol{N}$, $n=(n_1, \ldots, n_k) \in \boldsymbol{N}^k$, $t=(t_1, \ldots, t_k)$, $x=(x_1, \ldots, x_k)$, $a=(a_1, \ldots, a_k)$, $b=(b_1, \ldots, b_k) \in \boldsymbol{R}^k$ und

$I^{(k)}[a, b]=\{x=(x_1, \ldots, x_k) \mid a_i \leq x_i \leq b_i,\ a_i<b_i,\ i=\overline{1, k}\}$ ein Interval aus $\boldsymbol{R}^k$.

Es sei: 1°. $\tilde{C}(\boldsymbol{R}^k)$ ein metrischer Raum der Funktionen $f: \boldsymbol{R}^k \rightarrow \boldsymbol{R}$ die kontinuierlich und 2π-periodisch nach jeder Variable mit der Norm

$$\|f\|_{\tilde{C}} = \max\{|f(t)| : t \in I^{(k)}[0, 2\pi]\} \text{ sind};$$

2°. $H_{\omega_{(k)}}(I^{(k)}[a, b])$ (kurz $H_{\omega_{(k)}}$ wenn es klar ist um welches Intervall $I^{(k)}[a, b]$ es sich handelt) die Menge aller Funktionen $f: I^{(k)}[a, b] \rightarrow \boldsymbol{R}$, für welche

$$|f(\bar{x})-f(\bar{\bar{x}})| \leq \sum_{i=1}^{k} \omega_i(|\bar{x}_i-\bar{\bar{x}}_i|) \quad (\forall \bar{x}, \bar{\bar{x}} \in I^{(k)}[a, b]),$$

wo ω_i beliebig angegebene Moduls der Kontinuierlichkeit sind;

3°. $H^{\alpha}_{A_{(k)}}(I^{(k)}[a, b])=H^{\alpha_1, \ldots, \alpha_k}_{A_1, \ldots, A_k}(I^{(k)}[a, b])$ die Menge $H_{\omega_{(k)}}(I^{(k)}[a, b])$ wobei $\omega_i(t)= A_i t_i^{\alpha_i}$ $(0<\alpha_i \leq 1,\ 0<A_i<+\infty,\ i=\overline{1, k})$ ist;

4°. $\tilde{H}_{\omega_{(k)}}$ die Menge aller Funktionen $f \in H_{\omega_{(k)}}(\boldsymbol{R}^k)$ die nach jeder Variable 2π-periodisch sind (es ist klar, daß $\tilde{H}_{\omega_{(k)}} \subset \tilde{C}(\boldsymbol{R}^k)$ ist);

5°. $\tilde{H}^{a}_{A(k)}=\tilde{H}^{a_1,\ldots,a_k}_{A_1,\ldots,A_k}$ die Menge $\tilde{H}_{\omega(k)}$ wobei $\omega_i(t)=A_i t_i^{a_i}$ $(0<a_i\leq 1, 0<A_i<+\infty,\ i=\overline{1,k})$ ist.

6°. $V^c_{a,b}(a, b, c\in \boldsymbol{R},\ a<c<b)$ die Menge aller Funktionen $\varphi\in L[a,b]$, solcher, daß $\varphi(x)>0$ $(\varphi(x)<0)$ fast überall auf (a, c), $\varphi(x)<0$ $(\varphi(x)>0)$ fast überall auf (c, b) ist und $\int_a^b\varphi(t)dt=0$.

7°. Favardsumme, Rheihe $n=(n_1,\ldots,n_k)\in \boldsymbol{N}^k$ $(k\in \boldsymbol{N})$ für die Funktion $f\in\tilde{C}(\boldsymbol{R}^k)$

$$\theta_n(f;\ x)=\theta_{n_1,\ldots,n_k}(f;x_1,\ldots,x_k)=\pi^{-k}\int_0^{2\pi}\ldots\int_0^{2\pi}f(x_1,\ldots,x_k)F_{n_1}(t_1$$

$$-x_1)\ldots F_{n_k}(t_k-x_k)dt_1\ldots dt_k=\pi^{-k}\int_{I^{(k)}[0,\,2\pi]}f(x)F_{n(k)}(t-x)dt,$$

wo

$$F_q(v)=\frac{1}{2}+\sum_{r=1}^{q-1}\frac{r\pi}{2q}\operatorname{ctg}\frac{r\pi}{2q}\cos rv\ (q\in \boldsymbol{N},\ v\in \boldsymbol{R}).$$

Favardkern,

$$F_{n_{(k)}}(t)=\prod_{i=1}^{k}F_{n_i}(t_i)\ \ (n=(n_1,\ldots,n_k)\in \boldsymbol{N}^k,\ t=(t_1,\ldots,t_k)\in \boldsymbol{R}^k)$$

ist.

(Es ist klar, daß $F_q(v)=F_{q_{(1)}}(v)$.)

Die Aufgabe ist $\sup\{\|f-\theta_n(f)\|_{\tilde{C}}:f\in\tilde{H}^1_{A(k)}\}$ auszurechnen.

Für $k=1$ ist $\tilde{H}^1_{A(1)}=\tilde{H}^1_{A_1}$, $n=n_1\in \boldsymbol{N}$ und

$$\sup_{f\in\tilde{H}^1_{A(1)}}\|f-\theta_n(f)\|_{\tilde{C}}=\frac{\pi A_1}{2n_1}. \tag{1}$$

Für $k=2$ ist $\tilde{H}^1_{A(2)}=\tilde{H}^{1,1}_{A_1,A_2}$, $n=(n_1,n_2)\in \boldsymbol{N}^2$ und

$$\sup_{f\in\tilde{H}^1_{A(2)}}\|f-\theta_n(f)\|_{\tilde{C}}=\frac{\pi}{2}\sum_{i=1}^{2}\frac{A_i}{n_i} \tag{2}$$

$$+\frac{8A_1}{\pi^2}\int_0^{\pi/n_1}\Phi_{n_1}(x)\Phi_{n_2}\left(\frac{A_1x}{A_2}\right)dx+\frac{8A_2}{\pi^2}\int_0^{\pi/n_2}\Phi_{n_2}(x)\Phi_{n_1}\left(\frac{A_2x}{A_1}\right)dx$$

was ein wenig korrigiertes Resultat von S t e p a n e c darstellt [1].

Für $k=3$ werden wir folgenden Satz beweisen:

S a t z. Es sei $\tilde{H}^1_{A(3)}=\tilde{H}^{1,1,1}_{A_1,A_2,A_3}(0<A_i<+\infty,\ i=1,2,3)$ *die Menge aller Funktionen* $f:\boldsymbol{R}^3\to\boldsymbol{R}$ *die* 2π*-periodisch nach jeder Variable sind und die Bedingung* $|f(\bar{x})-f(\bar{\bar{x}})|\leq\Sigma_{i=1}^3A_i|\bar{x}_i-\bar{\bar{x}}_i|$ erfüllen. *Dann gilt für jedes* $n=(n_1,n_2,n_3)\in\boldsymbol{N}^3$ *eine asimptotische Gleichung*

$$(3)\qquad \sup_{f\in\tilde H^1_{A(3)}} \|f-\theta_n(f)\|_{\tilde C} = \frac{\pi}{2}\sum_{i=1}^{3}\frac{A_i}{n_i}$$

$$+\frac{8}{\pi^2}\sum_{(i,j)\in G_1}\Big[A_i\int_0^{\pi/n_i}\Phi_{n_i}(x)\Phi_{n_j}\Big(\frac{A_i x}{A_j}\Big)dx+A_j\int_0^{\pi/n_j}\Phi_{n_j}(x)\Phi_{n_i}\Big(\frac{A_j x}{A_i}\Big)dx\Big]$$

$$+\frac{32}{\pi^3}\sum_{(i,j,k)\in G_2}A_i\int_0^{\pi/n_i}\Phi_{n_i}(x)\Phi_{n_j}\Big(\frac{A_i x}{A_j}\Big)\Phi_{n_k}\Big(\frac{A_i x}{A_k}\Big)dx,$$

wo $G_1=\{(1,2),\ (1,3),\ (2,3)\}$, $G_2=\{(1,2,3),(2,3,1),(3,1,2)\}$, $\Phi_l(x)=\Sigma_{j=1}^{l-1}\overline{\Phi}_j^{(l)}(x)$, *ist und* $\overline{\Phi}_j^{(l)}(x)$ *die abnehmende Permutation der Funktion* $|\Phi_j^{(l)}(x)|$ *ist, d. h. Funktion die der Funktion*

$$m_j^{(l)}(y)=\operatorname{mes}E(|\Phi_j^{(l)}(x)|>y)\ (\forall y\geq 0),$$

$$\Phi_j^{(l)}(x)=\int_{j\pi/l}^{x}F_l(t)dt\quad(\forall l,\ j\in \boldsymbol{N},\ j<l)$$

nvers ist, und $F_l(t)$ $(l\in\boldsymbol{N},\ t\in\boldsymbol{R})$ *ein Favardkern ist.*

Beweis. Sei es H die Menge aller Funktionen $f\in\tilde H^1_{A(3)}$ die nach jeder Variable gerade sind und $f(0,0,0)=0$. Es ist klar, daß $H\subset\tilde H^1_{A(3)}$ und daß

$$(4)\qquad \sup_{f\in\tilde H^1_{A(3)}}\|f-\theta_n(f)\|_{\tilde C}=\sup_{f\in\tilde H^1_{A(3)}}|f(0)-\theta_n(f;\,0)|=\sup_{f\in H}\theta_n(f;\,0)|$$

$$=\sup_{f\in H}\Big|\frac{8}{\pi^3}\int_{I^{(3)}[0,\pi]}f(t)F_{n(3)}(t)dt\Big|$$

ist.

Da der Favardkern $F_q(v)$ $(q\in\boldsymbol{N})$ [2] die Bedingungen

$$(5)\qquad \int_0^{\pi/q}F_q(v)dv=\frac{\pi}{2};\qquad \int_{r\pi/2}^{(r+1)\pi/2}F_q(v)dv=0\ \ (r=1,2,\ldots,q-1);$$

$$F_q(v)>0\ \ \Big(|v|<\frac{\pi}{q}\Big)$$

erfüllt, erfüllen auch die Nullen v_r der Funktion $F_q(v)$ die Bedingungen

$$(6)\qquad \frac{r\pi}{2}<v_r<\frac{(r+1)\pi}{2}\quad(r=1,2\ldots,q-1).$$

Für jedes fixierte $n=(n_1,n_2,n_3)\in\boldsymbol{N}^3$ setzen wir $x_{v_i}=v_i\pi/n_i$ $(v_i=1,2,\ldots,n_i-1;\ i=1,2,3)$ ein. Das Integral in (4), transformieren wir unter Benutzung obiger Bezeichnungen auf folgende Weise

$$(7)\qquad \theta_n(f;\,0)=\theta_{n_1,n_2,n_3}(f;\,0,0,0)=8\pi^{-3}\int_{I^{(3)}[0,\pi]}f(t)F_{n_{(3)}}(t)dt$$

$$=8\pi^{-3}\Big(\int_0^{\pi/n_1}\int_0^{\pi/n_2}\int_0^{\pi/n_3}+\sum_{\nu_1=1}^{n_1-1}\int_{x_{\nu_1}}^{x_{\nu_1+1}}\int_0^{\pi/n_2}\int_0^{\pi/n_3}+\sum_{\nu_2=1}^{n_2-1}\int_{x_{\nu_2}}^{x_{\nu_2+1}}\int_0^{\pi/n_1}\int_0^{\pi/n_3}+\sum_{\nu_3=1}^{n_3-1}\int_{x_{\nu_3}}^{x_{\nu_3+1}}\int_0^{\pi/n_1}\int_0^{\pi/n_2}$$

$$+\sum_{\nu_1=1}^{n_1-1}\sum_{\nu_2=1}^{n_2-1}\int_{x_{\nu_1}}^{x_{\nu_1+1}}\int_{x_{\nu_2}}^{x_{\nu_2+1}}\int_0^{\pi/n_3}+\sum_{\nu_1=1}^{n_1-1}\sum_{\nu_3=1}^{n_3-1}\int_{x_{\nu_1}}^{x_{\nu_1+1}}\int_{x_{\nu_3}}^{x_{\nu_3+1}}\int_0^{\pi/n_2}+\sum_{\nu_2=1}^{n_2-1}\sum_{\nu_3=1}^{n_3-1}\int_{x_{\nu_2}}^{x_{\nu_2+1}}\int_{x_{\nu_3}}^{x_{\nu_3+1}}\int_0^{\pi/n_1}$$

$$+\sum_{\nu_1=1}^{n_1-1}\sum_{\nu_2=1}^{n_2-1}\sum_{\nu_3=1}^{n_3-1}\int_{x_{\nu_1}}^{x_{\nu_1+1}}\int_{x_{\nu_2}}^{x_{\nu_2+1}}\int_{x_{\nu_3}}^{x_{\nu_3+1}}\Big)f(t_1,t_2,t_3)\prod_{i=1}^{3}F_{n_i}(t_i)dt_i=\sum_{s=1}^{8}I_s(f).$$

Im weiteren Beweisverfahren sind uns folgende Hilfsmengen erforderlich

Lemma 1. *Es sei* $\varphi(x)=\Pi_{i=1}^3\varphi_i(x_i)\,(\varphi_i\in V^{c_i}_{a_i,b_i},\quad i=1,2,3)$, *dann ist*

$$\sup_{f\in H_{\omega(3)}(I^{(3)}[a,b]}\Big|\int_{I^{(3)}[a,b]}\varphi(x)f(x)dx\Big|\leq 4\Big|\int_{I[a,c]}\varphi(x)\min_{1\leq i\leq 3}\{\omega_i(\rho_i(x_i)-x_i)\}dx\quad \textit{wobei}$$

die Funktionen ρ_i $(i=1, 2, 3)$ *durch die Gleichungen*

$$\int_{a_i}^{x_i}\varphi_i(t)dt=\int_{a_i}^{\rho_i(x_i)}\varphi_i(t)dt\quad(a_i\leq x_i\leq c_i\leq\rho_i(x_i)\leq b_i;\ i=1,2,3)$$

definiert sind.

Wenn die $\omega_i\,(i=1, 2, 3)$ die Konveksmodule der Kontinuierlichkeit sind, dann besteht die Funktion $f^*\in H_{\omega(3)}(I^{(3)}[a,b])$, für welche die angegebene Ungleichung zur Gleichung wird.

Bemerkung. Den Beweis für Lemma 1 hat der Autor in [3] gegeben.

Lemma 2. *Es sei* $\varphi_i\in V^{c_i}_{a_i,b_i}$ $(i=1, 2)$, *die Funktion des* φ_3 *Dauerzeichens fast überall auf* $[a_3, b_3](a_3, b_3\in \boldsymbol{R},\ a_3<b_3)$

$$\varphi_3\in L[a_3,b_3],\ \varphi(x)=\prod_{i=1}^{3}\varphi_i(x),\ a=(a_1,a_2,a_3),\ b=(b_1,b_2,b_3)$$

dann ist

$$\sup_{f\in H^{\alpha}_{A(3)}(I^{(3)}[a,b])}\Big|\int_{I^{(3)}[a,b]}\varphi(x)f(x)dx\Big|=2\Big|\int_{a_1}^{c_1}\int_{a_2}^{c_2}\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)\min_{1\leq i\leq 2}\{A_i(\rho_i(x_i)$$

$$-x_i)\}dx_1dx_2\int_{a_3}^{b_3}\varphi_3(x_3)dx_3\Big|$$

wobei die Funktionen ρ_i *durch die Gleichungen*

$$\int_{a_i}^{x_i}\varphi_i(t)dt=\int_{a_i}^{\rho_i(x_i)}\varphi_i(t)dt\ (a_i\leq x_i\leq c_i\leq\rho_i(x_i)\leq b_i;\ i=1,2)$$

definiert sind, und die Funktionen $f^*(x_1, x_2, x_3)\in H^{\alpha}_{A(3)}(I^{(3)}[a,b])$ *die das Supremum realisiert, ist wie im Lemma von* A. I. Stepanec [4] *angegeben.*

Bemerkung. Lemma 2 ist direkte Folge des Lemma von Stepanec aus [4].

In [5] ist bewiesen worden, daß (siehe Absatz 2)

$$\sup_{f\in\tilde{H}^{\alpha}_{A(3)}} \| f-\theta_n(f)\|_{\tilde{C}} = \sum_{i=1}^{3} \sup_{f\in\tilde{H}^{\alpha_i}_{A_i(1)}} \| f-\theta_{n_i}(f)\|_{\tilde{C}} + \gamma_n(\alpha, A)$$

$$|\gamma_n(\alpha, A)| \leqq \frac{1}{4} \sum_{(i,j)\in G_1} \min \{A_i(\frac{\pi}{n_i})^{\alpha_i};\ A_j(\frac{\pi}{n_j})^{\alpha_j}\} + \frac{1}{8} \min_{1\leqq i\leqq 3} \{A_i(\frac{\pi}{n_i})^{\alpha_i}\}$$

wobei $G_1=\{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$ ist.

Durch Wiederholung der Aufstellung aus dem Beweis in Absatz 2, in [5], bekommen wir, unter Berücksichtigung von (1), daß für jedes $f\in H$ folgendes gültig ist

$$(8)\qquad \sum_{s=1}^{4} I_s(f) \leqq \sum_{i=1}^{3} \sup\{\| f-\theta_{n_i}(f)|_{\tilde{C}} : f\in\tilde{H}^1_{A_i(1)}\} = 2^{-1}\pi \sum_{i=1}^{3}(A_i/n_i).$$

Die Gleichung in (8) wird für die Funktion $\psi_n(x)\in H$ $(n=(n_1, n_2, n_3)\in \boldsymbol{N}^3$ $x=(x_1, x_2, x_3)\in \boldsymbol{R}^3)$ erreicht, die für $x\in I^{(3)}[0, \pi]$ so definiert ist

$$(9)\qquad \psi_n(x)=\psi_{n_1,n_2,n_3}(x_1, x_2, x_3)=\sum_{i=1}^{3}\psi_i(x)\ (\forall n\in \boldsymbol{N}^3, \forall x\in I^{(3)}[0, \pi])$$

wo für jedes $i\in\{1, 2, 3\}$

$$\psi_i(x_1, x_2, x_3)=\begin{cases} A_i(x_i-\frac{l\pi}{n_i});\ l=0, 2, \dots, x_i\in[\frac{l\pi}{n_i}, \frac{l+1}{n_i}\pi], x_j, x_k\in[0, \pi], \\ A_i(\frac{l+1}{n_i}\pi-x_i);\ l=1, 3, \dots, x_i\in[\frac{l\pi}{n_i}, \frac{l+1}{n_i}\pi], x_j, x_k\in[0, \pi] \end{cases}$$

wobei für jedes $i\in\{1, 2, 3\}$ $j, k\in\{1, 2, 3\}\setminus\{i\}$.

Bewerten wir jetzt $I_s(f)$ $(s=5, 6, 7)$ auf der Menge H. Zuerst, für jedes $f\in H$, haben wir

$$I_5(f)=8\pi^{-3}\sum_{\nu_1=1}^{n_1-1}\sum_{\nu_2=1}^{n_2-1}\int_{x_{\nu_1}}^{x_{\nu_1+1}}\int_{x_{\nu_2}}^{x_{\nu_2+1}}\int_{0}^{\pi/n_3} f(t)F_{n(3)}(t)dt = 8\pi^{-3}\sum_{\nu_1=1}^{n_1-1}\sum_{\nu_2=1}^{n_2-1} s_{\nu_1,\nu_2,0}(f).$$

Aus dem Lemma (2), beim Ersetzen der Zeichen $a_i=x_{\nu_i}$, $c_i=v_{\nu_i}$, $b_i=x_{\nu_i+1}$ $(i=1, 2)$, $a_3=0$, $b_3=\pi/n_3$, für jedes $f\in H$, bekommen wir

$$(10)\qquad |s_{\nu_1,\nu_2,0}(f)| \leqq \pi \left| \int_{x_{\nu_1}}^{v_{\nu_1}}\int_{x_{\nu_2}}^{v_{\nu_2}} F_{n_1}(t_1)F_{n_2}(t_2) \min_{1\leqq i\leqq 2}\{A_i(\rho_{\nu_i}(t_i)-t_i)\}dt_1dt_2 \right|$$

wobei, für jedes fixierte n_i und ν_i $(i=1, 2)$ die Funktionen ρ_{ν_i} durch die Gleichungen

$$\int_{x_{\nu_i}}^{t_i} F_{n_i}(t)d\tau = \int_{x_{\nu_i}}^{\rho_{\nu_i}(t_i)} F_{n_i}(\tau)d\tau \ (x_{\nu_i} \leq t_i \leq v_{\nu_i} \leq \rho_{\nu_i}(t_i) \leq x_{\nu_{i+1}})$$

definiert sind.

Aus der Ungleichung (10), für jede Funktion $f \in H$, folgt

$$(11) \qquad |I_5(f)| \leq 8\pi^{-2} \sum_{\nu_1=1}^{n_1-1} \sum_{\nu_2=1}^{n_2-1} \left| \int_{x_{\nu_1}}^{v_{\nu_1}} \int_{x_{\nu_2}}^{v_{\nu_2}} F_{n_1}(t_1)F_{n_2}(t_2) \min_{1 \leq i \leq 2} \{A_i(\rho_{\nu_i}(t_i)-t_i)\} dt_1 dt_2. \right.$$

Die Funktion (9) realisiert, gemäß Lemma (2) die Gleichung in (11). Auf ähnlicher Weise bekommen wir, an der Menge H, die Bewertungen

$$(12) \qquad |I_6(f)| \leq 8\pi^{-2} \sum_{\nu_1=1}^{n_1-1} \sum_{\nu_3=1}^{n_3-1} \left| \int_{x_{\nu_1}}^{v_{\nu_1}} \int_{x_{\nu_3}}^{v_{\nu_3}} F_{n_1}(t_1)F_{n_3}(t_3) \min_{1 \in \{1,3\}} \{A_i(\rho_{\nu_i}(t_i)-t_i)\} dt_1 dt_3 \right.$$

$$(13) \qquad |I_7(f)| \leq 8\pi^{-2} \sum_{\nu_2=1}^{n_2-1} \sum_{\nu_3=1}^{n_3-1} \left| \int_{x_{\nu_2}}^{v_{\nu_2}} \int_{x_{\nu_3}}^{v_{\nu_3}} F_{n_2}(t_2)F_{n_3}(t_3) \min_{i \in \{2,3\}} \{A_i(\rho_{\nu_i}(t_i)-t_i)\} dt_2 dt_3, \right.$$

wobei die Funktion (9), gemäß Lemma (2), die Gleichung in (12) und (13) realisiert.

Bewerten wir, schließlich, $I_8(f)$ an der Menge H. Wie es für jedes $f \in H$

$$I_8(f) = 8\pi^{-3} \sum_{\nu_1=1}^{n_1-1} \sum_{\nu_2=1}^{n_2-1} \sum_{\nu_3=1}^{n_3-1} \int_{x_{\nu_1}}^{x_{\nu_1+1}} \int_{x_{\nu_2}}^{x_{\nu_2+1}} \int_{x_{\nu_3}}^{x_{\nu_3+1}} f(t)F_{n(3)}(t)dt$$

$$= 8\pi^{-3} \sum_{\nu_1=1}^{n_1-1} \sum_{\nu_2=1}^{n_2-1} \sum_{\nu_3=1}^{n_3-1} s_{\nu_1,\nu_2,\nu_3}(f)$$

gemäß Lemma (1), durch Einsetzen der Zeichen $a_i = x_{\nu_i}$, $c_i = v_{\nu_i}$, $b_i = x_{\nu_i+1}$ für jedes f haben wir

$$(14) \qquad |s_{\nu_1,\nu_2,\nu_3}(f)| \leq 4 \left| \int_{x_{\nu_1}}^{v_{\nu_1}} \int_{x_{\nu_2}}^{v_{\nu_2}} \int_{x_{\nu_3}}^{v_{\nu_3}} \prod_{i=1}^{3} F_{n_i}(t_i) \min_{1 \leq i \leq 3} \{A_i(\rho_{\nu_i}(t_i)-t_i)\} dt_1 dt_2 dt_3 \right|$$

wobei für jedes fixierte n_i, ν_i ($i=1, 2, 3$) die Funktionen ρ_{ν_i} durch die Gleichungen

$$\int_{x_{\nu_i}}^{t} F_{n_i}(\tau)d\tau = \int_{x_{\nu_i}}^{\rho_{\nu_i}(t)} F_{n_i}(\tau)d\tau \ (x_{\nu_i} \leq t \leq v_{\nu_i} \leq \rho_{\nu_i}(t) \leq x_{\nu_i+1})$$

definiert sind.

Aus (14) folgt für jede Funktion $f \in H$,

$$(15) \qquad |I_8(f)| \leq 32\pi^{-3} \sum_{\nu_1=1}^{n_1-1} \sum_{\nu_2=1}^{n_2-1} \sum_{\nu_3=1}^{n_3-1} \Big| \int_{x_{\nu_1}}^{v_{\nu_1}} \int_{x_{\nu_2}}^{v_{\nu_2}} \int_{x_{\nu_3}}^{v_{\nu_3}}$$

$$\times \prod_{i=1}^{3} F_{n_i}(t_i) \min_{1\leq i\leq 3} \{A_i(\rho_{\nu_i}(t_i)-t_i)\} dt_1 dt_2 dt_3 \Big|,$$

wobei die Gleichung in (15) durch die Funktion (9) realisiert wird.

Die Funktion $f_n^*(x) = f^*_{n_1,n_2,n_3}(x_1, x_2, x_3)$ die gerade ist, 2π-periodisch und an $I^{(3)}[0, \pi]$ stimmt mit der Funktion (9) überein, gehört zur Menge H und ist dabei

$$(16) \qquad \theta_n(f_n^*; 0) = 2\pi^{-1} \sum_{i=1}^{3} \frac{A_i}{n_i}$$

$$+ 8\pi^{-2} \sum_{(i,j)\in G_1} \sum_{\nu_i=1}^{n_i-1} \sum_{\nu_j=1}^{n_j-1} \Big| \int_{x_{\nu_i}}^{v_{\nu_i}} \int_{x_{\nu_j}}^{v_{\nu_j}} F_{n_i}(t_i) F_{n_j}(t_j) \min_{k\in\{i,j\}} \{A_k(\rho_{\nu_k}(t_k)-t_k)\} dt_i dt_j \Big|$$

$$+ 32\pi^{-3} \sum_{\nu_1=1}^{n_1-1} \sum_{\nu_2=1}^{n_2-1} \sum_{\nu_3=1}^{n_3-1} \Big| \int_{x_{\nu_1}}^{v_{\nu_1}} \int_{x_{\nu_2}}^{v_{\nu_2}} \int_{x_{\nu_3}}^{v_{\nu_3}} \prod_{i=1}^{3} F_{n_i}(t_i) \min_{1\leq i\leq 3} \{A_i(\rho_{\nu_i}(t_i)-t_i)\} dt_1 dt_2 dt_3 \Big|,$$

wobei $G_1 = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$ ist.

Der Gleichung (16) werden wir eine etwas andere Form geben.

Es sei

$$\Phi_j^{(l)}(x) = \int_{j\pi/l}^{x} F_l(t) dt \quad (\forall l,\ j \in N,\ l > j),$$

$\overline{\Phi}_j^{(l)}(x)$ die sinkende Permutation der Funktion $|\Phi_j^{(l)}(x)|$, d. h. die Funktion die der Funktion $m_j^{(l)}(y) = \operatorname{mes} E(\Phi_j^{(l)}(x) > y)$ $(\forall y \geq 0)$ invers ist, und (gemäß N, P. Kornejčuk [6])

$$\Phi_l(x) = \sum_{j=1}^{l-1} \overline{\Phi}_j^{(l)}(x).$$

Durch Anwendung des Lemmas 1, des Lemma von Stepanec [4], und des Lemmas von Kornejčuk [6], bekommen wir durch die Methode der Teilintegration, nach kurzer Verrechnung

$$\sup_{f\in \widetilde{H}^1_{A(3)}} \| f - \theta_n(f) \|_{\widetilde{C}} = \pi 2^{-1} \sum_{i=1}^{3} \frac{A_i}{n_i}$$

$$+ 8\pi^{-2} \sum_{(i,j)\in G_1} \Big[A_i \int_0^{\pi/n_i} \Phi_{n_i}(x) \Phi_{n_j}\Big(\frac{A_i x}{A_j}\Big) dx + A_j \int_0^{\pi/n_j} \Phi_{n_j}(x) \Phi_{n_i}\Big(\frac{A_j x}{A_i}\Big) dx \Big]$$

$$+ 32\pi^{-3} \sum_{(i,j,k)\in G_2} A_i \int_0^{\pi/n_i} \Phi_{n_i}(x) \Phi_{n_j}\Big(\frac{A_i x}{A_j}\Big) \Phi_{n_k}\Big(\frac{A_i x}{A_k}\Big) dx$$

wobei $G_1 = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$, $G_2 = \{(1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)\}$ ist.

LITERATUR

1. А. И. Степанец. Точная оценка отклонений сумм Фавера на классах $H^{1,1}_{A,B}$. — В: Исследования по теории приближения функций и их приложения. Киев, 1978, 174-181.
2. С. Б. Стечкин. О приближении непрерывных периодических функций сумами Фавара. *Тр. Мат. инст. АН СССР*, **109**, 1971, 26-34.
3. N. V. Savić. O jednom ekstremalnom problemu u prostoru neprekidnih funkcija sa tri promenljive. *Mat. vesnik* (im Druck).
4. А. И. Степанец. К одной задаче А. Н. Колмогорова в случае функций двух переменных. *Укр. мат. ж.*, **24**, 1972, № 5, 653-666.
5. N. V. Savić. Aproksimacija neprekidnih periodičnih funkcija sa tri promenljive Favarovim sumama. *Mat. vesnik* (im Druck).
6. Н. П. Корнейчук. Экстремальные значения функционалов и наилучшее приближение на классах периодических функций. *Изв. АН СССР, Сер. матем.*, **35**, 1971, № 1, 93-124.

Universität Beograd
Naturwissenschaftlich-Mathematische Fakultät
11000 Beograd Jugoslavien

Eingegangen am 5. Juni, 1981