КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ'81
София, 1983, с. 595—598

CONSTRUCTIVE FUNCTION THEORY'81
Sofia, 1983, p. 595—598

НЕРЕШЕННЫЕ ЗАДАЧИ • UNSOLVED PROBLEMS

Бабаев М.-Б. А. Пусть $\mathscr{L}$ — линейное нормированное пространство функций $f=f(x)$, $x=(x_1, \ldots, x_n)$, определенных на множестве Q n-мерного евклидова пространства $R_n=R\{x_1, \ldots, x_n\}$. Введем раздельное приближение функции f суммами произведений функций меньшего числа переменных

$$E^A_{f,\mathscr{L}}=\inf_{\substack{\Sigma\,\Pi\varphi_{ij}\\ (i,j)\in A}} \|f(x)-\sum_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{k}\varphi_{ij}(\tau_{ij})\|,$$

здесь m и k — фиксированные натуральные числа, τ_{ij} — подмножества множества $\{x_1, \ldots, x_n\}$, функции $\varphi_{ij}\underset{df}{=}\varphi_{ij}(\tau_{ij})$ определены на проекциях множества Q на пространства $R\{\tau_{ij}\}$,

$$\varphi^A_{ij}=\begin{cases}\varphi_{ij}, & (i,j)\in A\\ \varphi^0_{ij}, & (i,j)\in \overline{m}\times\overline{k}\setminus A,\end{cases}$$

где $\overline{m}\times\overline{k}:\{(i,j),\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,k}\}: A\subset\overline{m}\times\overline{k}: \varphi^0_{ij}$ — фиксированные функции.

В случае $A\equiv\overline{m}\times\overline{k}$, $E^{\overline{m}\times\overline{k}}_{f,\mathscr{L}}=E_{f,\mathscr{L}}$ представляет собой наилучшее приближение функции f суммами произведений функций меньшего числа переменных $\Sigma^m_{i=1}\Pi^k_{j=1}\varphi_{ij}$. Из последнего при $k=1$ получается приближение суммами и при $m=1$ приближение произведениями функций меньшего числа переменных.

Задача 1. Найти эффективные формулы для вычисления значения раздельного приближения $E^A_{f,\mathscr{L}}$ в конкретных пространствах $\mathscr{L}$.

Задача 2. Построить соответствующие наилучшие приближающие функции.

Белый В. И. Пусть K — произвольный компакт в расширенной плоскости $\boldsymbol{C}$; $|\mu(z)|<k<1$ почти всюду в области ее определения $\mathscr{G}$, $\mathscr{G}\supset K$; $f_{\bar z}=\mu f_z$ — уравнение Бельтрами для $\mu(z)$.

Если $\mu(z)=0$ на K, указать необходимое и достаточное условие, которому должен удовлетворять K, чтобы всякая функция, непрерывная на K, была равномерным пределом решений уравнения Бельтрами в окрестностях компакта K. Напомним, что $\mu(z)=0$ при $z\in K$, но не при $z\in\mathscr{G}\supset K$).

Если $\mu(z)\equiv 0$ в $\mathscr{G}$, такой критерий дается известной теоремой Витушкина о критерии совпадения классов $C(K)$ и $R(K)$.

Кашин, Б. С. Существует ли последовательность $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ положительных чисел, $\lim_{n\to\infty}\gamma_n=0$, такая, что:

для любой ортонормированной на $[0, 1]$ системы $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{n}$ и для любой функции $N(x, y)$ с $1\leq N(x, y)\leq n$

$$\Big(\int_0^1\int_0^1\Big(\sum_{k=1}^{N(x,y)}\varphi_k(x)\varphi_k(y)\Big)^2 dxdy\Big)^{1/2}=\gamma_n\sqrt{n}\,(\log n)\,?$$

Осколков, К. И. Пусть $\mu=\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ — возрастающая последовательность натуральных чисел, обладающая свойством:

всякая непрерывная периодическая функция, спектр которой сосредоточен на μ, имеет равномерно сходящийся ряд Фурье.

Построить последовательности с „возможно более медленным ростом" при $k\to\infty$, обладающие указанным свойством.

В частности, возможно ли, чтобы такая последовательность удовлетворяла условию $\log n_k=O(\log k)$, $k\to\infty$.

Для $n_k=k^2$ такая задача была сформулирована П. Л. Ульяновым.

Рофе-Бекетов, Ф. С. Теорема Куранта о непрерывной зависимости собственных значений задачи Дирихле для эллиптического уравнения при возмущениях области требует близости границ возмущенной и невозмущенной областей. От этого условия можно отказаться, используя теоремы вложения и требуя, чтобы возмущенные области монотонно по включению зависели от параметра (см. теорему 3 и пример к ней в статье Ф. С. Рофе-Бекетова в *ДАН СССР*, **255**, 1980, 1054—1058).

Можно ли отказаться от условия монотонности и обобщить дальше теорему о непрерывной зависимости собственных значений от деформации области.

Сендов, Бл. Пусть f — ограниченная, вообще многозначная функция, заданная на отрезке $[0, 1]$. Обозначим

$$|\Delta_h^k f(x)|=\sup\{|y|:y=\Sigma_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}y_i,\ y_i\in f(x+ih);\ x,\ x+kh\in[0, 1]\};$$

$$\omega_k(f;\delta)=\sup\{|\Delta_h^k f(x)|:x\in[0, 1],\ 0<h\leq\delta\};$$

$$\|f\|=\sup\{|y|:y\in f(x),\ x\in[0, 1]\};$$

$$E_n(f)=\inf\{\|f-P\|:P\in H_n\}.$$

Существует ли ограниченная функция f, для которой $E_k(f)>\omega_{k+1}(f;\frac{1}{k+1})$. Для $k=0, 1, 2$ ответ отрицательный.

Степанец, А. И. Пусть $\psi\in C[x_1, x_4]$, $\int_{x_i}^{x_{i+1}}\psi(x)dx=0$, $i=1, 2, 3$,

$$\operatorname{sign}\psi(x)=\begin{cases}(-1)^{i+1}, & x\in[x_i, c_i], \quad i=1, 2, 3,\\ (-1)^i, & x\in[c_i, x_{i+1}], \quad i=1, 2, 3.\end{cases}$$

Найти $\sup\{|\int_{x_1}^{x_4}f(x)\psi(x)dx:f\in H_\omega[x_1, x_4]\}$, где $H_\omega[x_1, x_4]=\{f\in C[x_1, x_4]:\omega(f;t)\leq\omega(t),\ t\in[0, x_4-x_1]\}$

$$(|f(x')-f(x'')|\leq\omega(|x'-x''|)),\quad x', x''\in[x_1, x_4]),$$

$\omega(t)$ — произвольный модуль непрерывности (можно считать его выпуклым). Точки x_2 и x_3 расположены произвольно.

Стечкин, С. Б. Для каких модулей непрерывности $\omega(\delta)$ верно следующее утверждение: Для любой матрицы Лагранжа Λ найдется функция $f\in C[0, 1]$, $\omega(f, \delta)\leq\omega(\delta)$ для любого δ, такая, что соответствующая матрице Λ последовательность интерполяционных многочленов Лагранжа $\{L_n(f, x)\}$ расходится почти всюду на $[0, 1]$.

Стечкин, С. Б. Пусть X есть вещественное банахово пространство функций $f:\to\mathbf{R}$, наделенное нормой $\|.\|$. Для любой функции $f\in X, f\leq M$ положим $E_n^+(f)_X=\inf\{\|t_n-f\|;\ t_n\in T_n, t_n\geq f\}$, и если $\mathfrak{M}\subset X$, то положим $E_n^+(\mathfrak{M})_X=\sup\{E_n^+(f)_X: f\in\mathfrak{M}\}$.

При каких ограничениях на X и $\mathfrak{M}$ существует постоянная $C>0$, такая, что для любой функции $f\in\mathfrak{M}$ можно подобрать последовательность $\{t_n\}_{n=0}^\infty$, $t_0\geq t_1\geq\ldots\geq t_n\geq\ldots, t_n\geq f$ для всех n, для которой

$$\|t_n-f\|\leq CE_n^+(\mathfrak{M})_X\,?$$

Случай $X=C(\ )$ тривиален.

Вероятно утверждение верно, если $X=L_p$, $1\leq p<\infty$, а $\mathfrak{M}=W_p^r$, $r\in N$.

Теляковский, С. А. Пусть $F_n^\alpha(\bar{W}^1)=\sup\{\|f-\sigma_n^\alpha\|_C: f\in\bar{W}^1\}$ — верхняя грань уклонений функций класса $\bar{W}_1$ от средних Чезаро порядка α их рядов Фурье ($a=1, 2, \ldots$). При $\alpha\geq2$ справедлива оценка $F_n^\alpha(\bar{W}^1)<F_n^{\alpha+1}(\bar{W}^1)$. Справедлива ли эта оценка при $\alpha=1$?

Brosowski, B. Sei $C(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ der Vektorraum der stetigen Funktionen $x:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ versehen mit der Metrik

$$d(x, y)=\sup\{2^{-t^2}(1+|x(t)-y(t)|)^{-1}|x(t)-y(t)|: t\in\mathbf{R}\}.$$

Es sei V ein linearer Teilraum von $C(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ mit $\dim V<\infty$. Es gilt:
1) Genügt V der Haarschen Bedingung, so ist beste Approximation bezüglich V eindeutig.
2) Vermutung: Metrische Projektion unterhalb stetig, da Approximations-Problem bezüglich V eindeutig lösbar.

Ciesielski, Z. Let $S_n^\nu(T)$ be the space of periodic natural splines of order ν on the toros $T=\langle0, 1)$. It is known that for $0<k\leq\nu-1$, $f\in S_n^\nu(T)$ the inequality

$$(*)\qquad \|D^kf\|_{L^p}\leq C_rn^k\omega_k(f;\ 1/n)$$

holds for $n\geq1$. Can $(*)$ be extended to wider class of partitions?

Gonska, H. H. What is the exact value of the quantity

$$c:=\sup_{n\in N}\ \sup_{f\in\varphi[0,\ 1]\setminus\pi_1[0,1]}\frac{\|B_nf-f\|_\infty}{\omega_2(f, 1/\sqrt{n})}\,?$$

Here B_n is the n-th Bernstein operator defined on $\varphi[0, 1]$ and $\omega_2(f; \cdot)$ denotes the second order modulus of continuity; it is known that $c \leq 13/4$.

This is closely connected to the question how (and if) the known inequality

$$K(t^2, f; \varphi[a, b], \varphi^2[a, b]) \leq \left(\frac{3}{2} + 2 \max\left\{1, \left(\frac{t}{b-a}\right)^2\right\}\right) \omega_2(f; t),$$

$0 \leq t \in \boldsymbol{R}$, can be improved, where $K(t^2, f; \ldots)$ is the K-functional given by

$$K(t^2, f; \ldots) = \inf\{\|f-g\|_\infty = t^2 \|g''\|_\infty : g \in \varphi^2[a, b]\}.$$

Kallioniemi, H. Let $U = \{u_i\}_0^n$ be a set of points with $-1 = u_0 < u_1 < \ldots < u_n = 1$. Let $\omega(x) = \Pi_{i=0}^n (x - u_i) = \omega(x; U)$.

Problem: Determine the set U^* with

$$\max_{x \in [-1, 1]} |\omega^{(k)}(x; U^*)| = \inf_U \max_{x \in [-1,1]} |\omega^{(k)}(x; U)|.$$

Partial solution: If $k = 1$ and n is odd, $U^* = \{u : \int_{-1}^u \cos n \arccos t\, dt = 0\}$.

Background: In Lagrangian numerical differentiation in $[-1, 1]$ with the set U as nodes it is known that in a subset of $[-1, 1]$ of measure $2(1-(k/n))$ the truncation error can be written as

$$\frac{\omega^{(k)}(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta) \text{ for some } \theta \text{ in } [-1, 1].$$

Moreover, if the set satisfies $\max_{x \in [-1,1]} \prod_{i=1}^{n-1} (x - u_i) = \prod_{i=1}^{n-1} (1 - u_i)$, then the truncation error is maximized by $M_{n+1} \|\omega^{(k)}\|/(n+1)!$ where $M_{n+1} = \|f^{(n+1)}\|$ and the norms are max norms over $[-1, 1]$. Hence the set U^* will in some sense minimize the truncation error in Lagrangian numerical differentiation.

Karlson, J. Suppose we have a Jordan curve in the plane. If the curve is a circle, it intersects the zero-set of a polynomial of degree n (in x and y) in at most $2n$ points. (The restriction of the polynomial is trigonometric). What about more general curves.

The problem is of interest in proving inverse theorems on rational approximation.