КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ
ФУНКЦИЙ'84
София, 1984, с. 9—13

CONSTRUCTIVE THEORY
OF FUNCTIONS'84
Sofia, 1984, p. 9-13

Приближение функций двух переменных арифметическими средними сумм Фурье-Эрмита.

В. А. Абилов

I. Пусть $H_n(x)$ $(n=0,1,\dots)$ – ортонормированная система многочленов Эрмита ([I], стр. I08),

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} c_{n,m}(f)\, H_n(x)\, H_m(y) \tag{I}$$

$$\left(c_{n,m}(f)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} f(x,y)\, H_n(x)\, H_m(y)\, dx\, dy \right)$$

– двойной ряд Фурье-Эрмита функции $f(x,y)$ $(-\infty<x,y<+\infty)$,

$$S_{n,m}(f;x,y)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} c_{i,j}(f)\, H_i(x)\, H_j(y)$$

– прямоугольные частные суммы ряда (I) и

$$\sigma_{n,m}(f;x,y)=\frac{1}{(n+1)(m+1)}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} S_{i,j}(f;x,y)$$

их арифметические средние.

Пусть, далее, $\omega_i(t)$ $(i=1,2)$ – заданные модули непрерывности, т.е. функции, заданные на $[0,+\infty)$ и удовлетворяющие условиям :

1) $\lim\limits_{t\to 0}\omega_i(t)=\omega_i(0)=0$,

2) $0\le\omega_i(t_2)-\omega_i(t_1)\le\omega_i(t_2-t_1)$ $(0\le t_1<t_2)$.

Обозначим через H_{ω_1,ω_2} класс непрерывных на всей плоскости функций $f(x,y)$, удовлетворяющих условиям :

$$\text{I)}\quad f(0,0)=0\,,$$

$$\text{2)}\quad |f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|\le \omega_1(|x_1-x_2|)+\omega_2(|y_1-y_2|)\,.$$

Положим

$$\mathcal{E}_{\sigma_{n,m}}(x,y)=\sup_{f\in H_{\omega_1,\omega_2}}|f(x,y)-\sigma_{n,m}(f;x,y)|\,.$$

В этой заметке мы докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА. При любых $n,m\to\infty$

$$\mathcal{E}_{\sigma_{n,m}}(x,y)=e^{x^2+y^2}\,O\left[\omega_1\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)+\omega_2\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right)\right],$$

где константа, входящая в $O(1)$, абсолютная.

Аналогичная теорема в одномерном случае доказана в [2], [3].

2. Отметим некоторы предложения, которыми мы будем пользо - ваться в дальнейшем.

Для многочленов $H_n(x)$ справедливы формулы ([I], стр. II5; [4], стр.88; [5], стр.22)

$$\frac{d}{dx}H_n(x)=\sqrt{2n}\,H_{n-1}(x)\,, \tag{2}$$

$$H_n(x)=\sqrt[4]{\frac{2}{\pi^2 n}}\,e^{\frac{x^2}{2}}\left\{\cos\left(\sqrt{2n}\,x-\frac{n\pi}{2}\right)+O\left(\frac{1+|x|^{3/2}}{\sqrt{n}}\right)\right\}, \tag{3}$$

$$H_{n+1}(x)H_n(y)-H_n(x)H_{n+1}(y)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2}{n+1}}\,e^{\frac{x^2+y^2}{2}}\left\{\sin\sqrt{2n}\,(x-y)+O\left(\frac{1+u^{3/2}}{\sqrt{n}}\right)\right\} \tag{4}$$

$$\left(u=\max\{|x|,|y|\}\right).$$

ЛЕММА I. Справедливо асимптотическое равенство

$$\sum_{k=1}^{n} \sin\sqrt{2k}\,t = \int_{1}^{\sqrt{2n}} x \sin tx\,dx + O(1+t^2)\ln n.$$

ЛЕММА 2. Если $f \in H_{\omega_1,\omega_2}$, то

$$\int_{\frac{\pi}{\sqrt{2n}}}^{1}\int_{\frac{\pi}{\sqrt{2m}}}^{1} f(x,y)\,\frac{\cos\sqrt{2n}\,x\cos\sqrt{2m}\,y}{(xy)^2}\,dx\,dy = O\left[\sqrt{nm}\left(\omega_1\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)+\omega_2\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right)\right)\right].$$

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Как известно,

$$\Delta_{n,m}(x,y) = f(x,y) - \sigma_{n,m}(f;x,y) =$$

$$= \frac{1}{(n+1)(m+1)}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(u^2+v^2)}[f(x,y)-f(u,v)]\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} K_i(u,x)K_j(v,y)\,du\,dv,$$

где

$$K_n(x,y) = \sqrt{\frac{n+1}{2}}\;\frac{H_{n+1}(x)H_n(y)-H_{n+1}(y)H_n(x)}{x-y}.$$

Считая, что $x \geq 0,\ y \geq 0$ разобьём последний интеграл на четыре части

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} = \int_{x}^{\infty}\int_{y}^{\infty} + \int_{-\infty}^{x}\int_{y}^{\infty} + \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} + \int_{x}^{\infty}\int_{-\infty}^{y}$$

и оценим первый из этих интегралов (остальные оцениваются аналогично). Пользуясь вспомогательными предложениями, указанными выше, можно показать, что

$$\Delta_{n,m}(x,y)=\frac{1}{(n+1)(m+1)}\int_{x+\frac{\pi}{2\sqrt{2n}}}^{x+1}\int_{y+\frac{\pi}{2\sqrt{2m}}}^{y+1} e^{-(u^2+v^2)}[f(x,y)-f(u,v)]\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}K_i(u,x)K_j(v,y)\,du\,dv+$$

$$+e^{x^2+y^2}O\left[\omega_1\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)+\omega_2\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right)\right].$$

В силу (4).

$$K_n(u,x)\,K_m(v,y)=$$

$$=\frac{1}{\pi^2}e^{\frac{x^2+y^2+u^2+v^2}{2}}\frac{1}{(u-x)(v-y)}\left[\sin\sqrt{2n}(u-x)\sin\sqrt{2m}(v-y)+O(1+t_1t_2)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{m}}\right)\right]$$

$$\left(t_1=\max\{|u|,|x|\},\ t_2=\max\{|v|,|y|\}\right).$$

Следовательно,

$$\Delta_{n,m}(x,y)=\frac{e^{\frac{x^2+y^2}{2}}}{\pi^2(n+1)(m+1)}\int_{x+\frac{\pi}{2\sqrt{2n}}}^{x+1}\int_{y+\frac{\pi}{2\sqrt{2m}}}^{y+1} e^{-\frac{1}{2}(u^2+v^2)}\frac{f(x,y)-f(u,v)}{(u-x)(v-y)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sin\sqrt{2i}(u-x)\sin\sqrt{2j}(v-y)\,du\,dv+$$

$$+e^{x^2+y^2}O\left[\omega_1\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)+\omega_2\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right)\right].$$

Пользуясь леммой I, после несложных преобразований, получим

$$\Delta_{n,m}(x,y)=\frac{2e^{\frac{x^2+y^2}{2}}}{\pi\sqrt{(n+1)(m+1)}}\int\limits_{x+\frac{\pi}{2\sqrt{2n}}}^{x+1}\int\limits_{y+\frac{\pi}{2\sqrt{2m}}}^{y+1}e^{-\frac{1}{2}(u^2+v^2)}\frac{f(x,y)-f(u,v)}{(u-x)(v-y)}\cos\sqrt{2n}(u-x)\cos\sqrt{2m}(v-y)\,du\,dv+$$

$$+e^{x^2+y^2}O\left[\omega_1\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)+\omega_2\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right)\right].$$

Для завершения доказательства теоремы остается к последнему интегралу применить лемму 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г.Сеге.Ортогональные многочлены. М.,Физматгиз,1962.

2. А.Х.Бабаев.О порядке приближения непрерывных функций суммами фейера по многочленам Эрмита.ИАН Азерб . ССР,сер.физ-тех. и матем.наук,№2,1966,стр.3-14.

3. В.А.Абилов.О порядке приближения непрерывных функций арифметическими средними частных сумм ряда Фурье-Эрмита.Известия вузов,матем.,1972,№3(118),стр.3-9.

4. Я.Л.Геронимус.Теория ортогональных многочленов.М.,1950.

5. С.А.Агаханов,Г.И.Натансон.Приближение одного класса функций частными суммами ряда Фурье-Эрмита.Учен.зап.Казанск.ун-та, т.124,кн.6,1964,стр.20-30.