КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ'84
София, 1984, с. 14—17

CONSTRUCTIVE THEORY OF FUNCTIONS'84
Sofia, 1984, p. 14-17

СПЕКТРЫ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ И ПОПЕРЕЧНИКИ СОБОЛЕВСКИХ КЛАССОВ

А.П. Буслаев, В.М. Тихомиров

Пусть $I=[0,1]$, $1\le q<\infty$, $1<p\le\infty$, $x(\cdot)$, $y(\cdot)$ –функции из $L_q(I)$ и $L_{p'}(I)$ соответственно, $1/p+1/p'=1$, $z_{(s)}(\cdot)$ обозначает функцию $|z(\cdot)|^{s-1}\operatorname{sign} z(\cdot)$, $\|z(\cdot)\|_s=\|z(\cdot)\|_{L_s(I)}$.
Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$(1)\quad x^{(r)}(t)=y_{(p')}(t),\quad y^{(r)}(t)=(-1)^r\lambda^q\rho(t)x_{(q)}(t),$$

где $\rho(\cdot)$– непрерывная положительная на I функция при одном из следующих краевых условий $\mathcal{T}$:

$$\mathcal{T}_{alt}=(\Gamma_{alt},\Gamma^*_{alt})\Leftrightarrow x^{(i)}((1-(-1)^i)/2)=y^{(i)}((1-(-1)^{i+r+1})/2)=0,$$
$$\mathcal{T}_0=(\Gamma_0,\Gamma_0^*)\Leftrightarrow x^{(i)}(0)=y^{(i)}(1)=0,\ \mathring{\mathcal{T}}=(\mathring{\Gamma},\mathring{\Gamma}^*)\Leftrightarrow x^{(i)}(0)=$$
$$=x^{(i)}(1)=0,\ \mathcal{T}_\phi=(\Gamma_\phi,\Gamma_\phi^*)\Leftrightarrow y^{(i)}(0)=y^{(i)}(1)=0,\ \widetilde{\mathcal{T}}=(\widetilde{\Gamma},\widetilde{\Gamma}^*)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^{(i)}(0)=x^{(i)}(1),\ y^{(i)}(0)=y^{(i)}(1),\ i=0,1,\dots,r-1,$$

и условии нормировки: $\|x^{(r)}(\cdot)\|_p=1$. Выше через Γ обозначены условия на $x(\cdot)$, а через Γ^* – условия на $y(\cdot)$. Совокупность чисел, для которых существует решение системы (I) при некотором краевом условии $\mathcal{T}$ и условии нормировки, назовем <u>спектром</u> системы (I) при условиях $\mathcal{T}$. Через $W_p^r(I,\Gamma)$ обозначим соболевский класс функций $x(\cdot)\in C^{r-1}(I)$, для которых $x^{(r-1)}(\cdot)$ абсолютно непрерывна, $x^{(r)}(\cdot)\in L_p(I)$, $x^{(r)}(\cdot)$ удовлетворяет граничным условиям $\Gamma\in\{\Gamma_{alt},\Gamma_0,\mathring{\Gamma},\Gamma_\phi,\widetilde{\Gamma}\}$ и $\|x^{(r)}(\cdot)\|_p\le 1$. Имеет место следующая

<u>Теорема</u>. а) (теорема существования) Для любых: целого неотрицательного числа k, натурального r, вещественных чисел p и q,

удовлетворяющих неравенствам $1 < q \le p \le \infty, q<\infty$ и одного из перечисленных граничных условий $\mathcal{T}$ существует тройка $(x_k(\cdot), y_k(\cdot), \lambda_k)$, $x_k(\cdot) = x_{krpq\rho\Gamma}(\cdot)$, $y_k(\cdot) = y_{krpq\rho\Gamma}(\cdot)$, $\lambda_k = \lambda_{krpq\rho\Gamma}$, удовлетворяющая уравнению (I), краевому условию $\mathcal{T}$ и условию нормировки $\|x_k^{(r)}(\cdot)\|_p = 1$.

б) (теорема единственности) В условиях п. а) числа $\lambda_k = \lambda_{krpq\rho\Gamma}$ исчерпывают спектр системы (I) при условиях $\mathcal{T}$. При этом функции $x_k(\cdot) = x_{krpq\rho\Gamma}(\cdot)$ определены однозначно.

в) (случай $p = q = \infty$) Для любого натурального r, целого неотрицательного k и всех Γ, кроме $\widetilde{\Gamma}$, существует и единственна функция $x_k(\cdot) = x_{kr\infty\infty\Gamma}(\cdot)$, обладающая тем свойством, что $|x_k^{(r)}(\cdot)| \equiv 1$ при $\Gamma \in \{\Gamma_{alt}, \Gamma_c, \mathring{\Gamma}\}$ и $x_k^{(r)}(\cdot) \equiv 0$, $0 \le k \le r-1$, $|x_k^{(r)}(\cdot)| \equiv 1$, $k \ge r$ при $\Gamma = \Gamma_\phi$ и при этом $x_k(\cdot)$ имеет k-альтернанс на I и число перемен знака r-той производной функции $x_k(\cdot)$ равно k при $\Gamma \in \{\Gamma_c, \Gamma_{alt}\}$, $k-r$ при $\Gamma = \Gamma_\phi$ и $k+r$ при $\Gamma = \check{\Gamma}$.

г) (периодический случай) Для любого натурального r, натурального k, вещественных $1 \le p, q \le \infty$ спектр системы (I) при условии $\widetilde{\mathcal{T}}, \rho = 1$ исчерпывается числами $k^r \widetilde{\lambda}_{rpq}$, где $\widetilde{\lambda}_{rpq} = \lambda_{crpq\rho\Gamma_{alt}} \cdot 4^{-r}$, $\rho \equiv 1$.

д) Если $p \ge q$, $\Gamma \in \{\Gamma_c, \mathring{\Gamma}, \Gamma_\phi, \Gamma_{alt}\}$, $\rho \equiv 1$, то

$$d_k(W_p^r(I,\Gamma), L_q(I)) = \lambda_{krpq\rho\Gamma}^{-1},$$

$$d_{2k-1}(W_p^r(I,\widetilde{\Gamma}), L_q(I)) = d_{2k}(W_p^r(I,\widetilde{\Gamma}), L_q(I)) = k^{-r}\widetilde{\lambda}_{rpq}^{-1}.$$

е) Одним из экстремальных подпространств для класса $W_p^r(I,\Gamma)$ является пространство сплайнов $S_k^r(p,q,\Gamma) = \{y(\cdot) \mid y^{(r)}(t) = \sum_{j=1}^{k} c_j \delta(t-\tau_j),\ y|_{\partial I} \in \Gamma\}$, где $\tau_i = \tau_{ikrpq\Gamma}$ — нули функции $x_{krpq\rho\Gamma}(\cdot)$ $(\rho \equiv 1)$.

Уравнения (I) обобщают системы $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -\lambda\rho x$ штурмлиувиллиевского типа. Их исследованию посвящено огромное число работ, начиная с классических работ Штурма-Лиувилля.

Уравнения вида $\dot{x} = y_{(p')}$, $\dot{y} = -\lambda^q \rho x_{(q)}$ изучал Люстерник (1937, 1938). Линейные уравнения типа (I), когда $p=q=2$ также был подвергнут тщательному анализу. В ряде случаев решения этих уравнений описываются т.н. осцилляционными ядрами и из этого обстоятельства удается извлечь и однократность спектра и многие другие полезные свойства решений. В частности, Колмогоров (1936) в работе, где он ввел в теорию приближений понятие поперечника, доказал утверждение д) для $p=q=2$, $\Gamma=\Gamma_{\varnothing}$, опираясь на результаты Крейна (1934) об уравнениях (I) при $p=q=2$ с краевыми условиями $\Gamma_{\varnothing}$. Теорема в) для $\Gamma=\Gamma_{\varnothing}$ была доказана Тихомировым (1969) и в этом же случае им была получена теорема е) о приближении сплайнами. Периодический случай для $p=q=2$ был также до конца исследован Колмогоровым (1936), где была обнаружена экстремальность тригонометрических полиномов. Периодический случай для $p=q=\infty$ был исследован Тихомировым (1960), (1969) и там была раскрыта экстремальность и сплайнов и тригонометрических полиномов.

После работы Тихомирова-Бабаджанова (1967) стало ясно, что все дело в спектре уравнений типа (I). Тихомиров неоднократно высказывал гипотезу о том, что при $p \geq q$ поперечники соболевских классов $W_p^r(I,\Gamma)$ суть числа обратные к спектральным числам системы (I) при краевом условии Γ (в частности, в лекциях в банаховском центре 1975г.).

Эта гипотеза впоследствии неоднократно подтверждалась в работах Маковоза (1979), Лигуна (1980), а также в цикле работ Мелкмана и Миччелли (1978), Миччелли и Пинкуса (1977). Особенно большой сдвиг был сделан Пинкусом (1983), где был разобран случай $p=q$, $\Gamma=\Gamma_{\varnothing}$ и ряд других.

Теперь гипотеза доказана полностью. Общий замысел доказательства восходит к упоминавшимся работам Тихомирова. Ряд принципиальных трудностей был преодолен А.П.Буслаевым.

Сейчас особенно остро встают следующие вопросы:

I) Как устроены точные решения при $p<q$?

2) Каков "приближенческий" смысл спектра при $p<q$?