КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ
ФУНКЦИЙ'84
София, 1984, с. 18—26

CONSTRUCTIVE THEORY
OF FUNCTIONS'84
Sofia, 1984, p. 18-26

НАИЛУЧШИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ РЕШЕНИЙ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ОПТИМИЗАЦИЯ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ

Б. Г. Габдулхаев, Г. Д. Велев

1. Введение. В монографии [1] предпринята попытка создания общей теории наилучших конечномерных приближений решений операторных уравнений, основанной на общей теории приближенных методов функционального анализа и на многочисленных результатах конструктивной теории функций, в частности, теории поперечников компактов в функциональных пространствах. В работах [1,2] указана связь теории наилучших приближений решений операторных уравнений с аппроксимационными числами линейных операторов. Ниже изучается связь между аппроксимационными числами вполне непрерывных операторов и оптимизацией приближенных методов решения функциональных уравнений второго рода. В качестве приложений предлагается оптимизация методов вырожденных ядер решения интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерра второго рода, что позволило получить для них ряд окончательных результатов.

2. Постановка задачи. Пусть X - банахово пространство, а $L(X)$ пространство определенных в X линейных ограниченных операторов с обычной нормой. Рассмотрим в пространстве X класс $\mathcal{E}$ однозначно разрешимых линейных операторных уравнений

/1/ $$Kx \equiv x - Hx = y \quad (x,y \in X,\ H \in L(X)),$$

определяемый некоторыми классами операторов $\mathcal{H} = \{H\} \subset L(X)$ и правых частей $Y^* = \{y\}$. В том же пространстве введем класс $\mathcal{E}_N$ однозначно разрешимых линейных операторных уравнений

/2/ $$K_N x \equiv x - H_N x = y \quad (x,y \in X,\ H_N \in L(X)),$$

определяемый классом Y^* и некоторым классом конечномерных операторов $\mathcal{H}_N = \{H_N\} \subset L(X)$ размерности не выше N .

Заметим, что решение уравнений /2/ приводит к решению систем линейны алгебраических уравнений порядка не выше N, что является значительно более простой задачей, чем решение уравнения /1/. Заметим также, что ниже однозначная разрешимость фиксированных уравнений вида /2/ выводится как следствие /см. [1] / аналогичного свойсва уравнений /1/, что естествено с точки зрения приложений.

Решение $x^* \in X$ уравнения /1/ заменим решениями $x_N^* \in X$ уравнений /2/ при каждом фиксированном N. Поскольку допускаемая при этом погрешность зависит от способа выбора уравнений /2/, то естественно попытаться, чтобы она была минимальной в зависимости от указанного выбора; другими словами, наша задача состоит в том, чтобы в классе $\mathcal{E}_N$ найти такое уравнение /кратко "метод"/ вида /2/:

/2°/ $$K_N^0 x = x - H_N^0 x = y \quad (x, y \in X \ , \ H_N^0 \in \mathcal{H}_N \ ),$$

решение $x_N^0 \in X$ которого в каком-либо смысле наилучшим образом аппроксимировало бы решение $x^* \in X$ уравнения /1/ из класса $\mathcal{E}$. Для решения этой задачи нам понадобится величина [1,3]

$$V_N(\mathcal{E}) = \inf_{H_N \in \mathcal{H}_N} \ \sup_{H \in \mathcal{H}, \, y \in Y^*} \|x - x_N\|_X ,$$

являющаяся оптимальной оценкой погрешности класса $\mathcal{E}_N$ методов /2/ на классе $\mathcal{E}$ уравнений /1/.

Следуя [3,1], введем такое

О п р е д е л е н и е. Пусть выполняется одно из следующих условий:

$$V(\mathcal{E}; H_N^0) = V_N(\mathcal{E}), \quad V(\mathcal{E}; H_N^0) \sim V_N(\mathcal{E}), \quad V(\mathcal{E}; H_N^0) \asymp V_N(\mathcal{E}),$$

где

$$V(\mathcal{E}; H_N^0) = \sup \left\{ \|x^* - x_N^0\| : H \in \mathcal{H} \ , \ y \in Y^* \right\}, \quad x_N^0 = (E - H_N^0)^{-1} y,$$

а знаки $\sim$ и $\asymp$ означают, как обычно, сильную и слабую эквивалентности соответственно. Тогда метод /2°/ называется соответственно оптимальным, асимптотически оптимальным, оптимальным по порядку на классе $\mathcal{E}$ уравнений /1/.

Ниже будем рассматривать, как правило, случай, когда класс $\mathcal{H}$ состоит из вполне непрерывных операторов и операторы $H_N \in \mathcal{H}_N$ аппроксимируют операторы $H \in \mathcal{H}$ в том смысле, что

/3/ $$\|H - H_N\| \to 0 \ , \ N \to \infty ;$$

при этом будем предполагать также, что для любых $H \in \mathcal{H}$

/4/ $$\|K\| \leq c_0 < \infty \ , \quad \|K^{-1}\| \leq c_1 < \infty \quad (c_0, c_1 > 1),$$

где c_0 и c_1 - некоторые постоянные /общие для всего класса $\mathcal{E}$ /, а $Y^* = S(0,1) \subset X$-единичный шар с центром в начале координат.

Всюду далее обозначим через

/5/ $$s_N(H) = \inf \left\{ \|H - H_N\| : H_N \in \mathcal{H}_N \right\}, \quad s_N(\mathcal{H}) = \sup \left\{ s_N(H) : H \in \mathcal{H} \right\}$$

N-е аппроксимационные числа /см., напр., [4,5] / фиксированного вполне непрерывного оператора H и соответсвенно множества операраторов $\mathcal{H}$; через $d_N(\Phi) = d_N(\Phi, X)$ и $\lambda_N(\Phi) = \lambda_N(\Phi, X)$ будем обозначать соответственно N-й поперечник Колмогорова и N-й линейный поперечник /см., напр., [6,7] / компактного множества $\Phi \subset X$ в пространстве X.

3. Основные результаты. Имеет место следующая

Т е о р е м а 1. Пусть множество $\mathcal{H}$ таково, что $s_N(\mathcal{H}) \to 0$ при $N \to \infty$. Тогда для классов уравнений $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}_N$, определенных соотношениями /1/-/4/, справедливы оценки

$$d_N(Z^*) \leqq V_N(\mathcal{E}) \asymp s_N(\mathcal{H}), \quad Z^* = \{z^*\}, \tag{6}$$

где $z^* \in X$ есть решение уравнения

$$Kz \equiv z - Hz = Hy \quad (z \in X,\ y \in S(0,1),\ H \in \mathcal{H}). \tag{1'}$$

При этом метод /2^0/, удовлетворяющий любому из условий

$$\sup_{H \in \mathcal{H}} \|H - H_N^o\| \asymp s_N(\mathcal{H}), \qquad \sup_{H \in \mathcal{H}} \|H - H_N^o\| \asymp d_N(Z^*), \tag{7}$$

является оптимальным по порядку на классе $\mathcal{E}$.

С л е д с т в и е. Метод /2^0/, удовлетворяющий любому из условий

$$V(\mathcal{E}; H_N^o) = d_N(Z^*), \qquad V(\mathcal{E}; H_N^o) \sim d_N(Z^*),$$

является соответственно оптимальным и асимптотически оптимальным на классе $\mathcal{E}$.

Теперь несколько сузим класс $\mathcal{E}$ уравнений /1/, предполагая, что множество $\mathcal{H}$ состит из одного фиксированного вполне непрерывного оператора H .

Т е о р е м а 2. Справедлива следующая оценка сильной эквивалентности:

$$V_N(\mathcal{E}) \sim \inf_{H_N \in \mathcal{H}_N} \|K^{-1}(H - H_N)K^{-1}\| \equiv a_N, \tag{8}$$

и метод /2^0/, удовлетворяющий любому из условий

$$\|K^{-1}(H - H_N^o)K^{-1}\| \sim a_N, \quad \|K_N^{o\,-1}(H - H_N^o)K_N^{o\,-1}\| \sim a_N, \tag{9}$$

является асимптотически оптимальным на классе $\mathcal{E}$.

Т е о р е м а 3. Положим $Z_o^* \equiv K^{-1}HS(0,1)$. Тогда спаведливы оценки

$$d_N(Z_o^*) \leqq V_N(\mathcal{E}) \asymp s_N(H), \tag{10}$$

и метод /2^0/, удовлетворяющий любому из условий $\|H - H_N^o\| \asymp s_N(H)$, $\|H - H_N^o\| \asymp d_N(Z_o^*)$, является оптимальным по порядку на классе $\mathcal{E}$.

Теперь несколько сузим также класс допускаемых к "конкуренции" методов /2/, /2^0/, полагая $H_N = P_N H$, $H_N^0 = P_N^0 H$, где P_N и $P_N^0 \in L(X)$- линейные операторы размерности не выше N.

Т е о р е м а 4. Положим $Z_1^* \equiv HK^{-1}S(0,1)$. Тогда справедливы оценки

/11/ $$\lambda_N(Z_1^*) \asymp v_N(\mathcal{E}) \leqq v(\mathcal{E};H_N^0) = O(\|H - P_N^0 H\|),$$

и метод /2^0/ с оператором $H_N^0 = P_N^0 H$, удовлетворяющим условию $\|H - P_N^0 H\| \asymp \lambda_N(Z_1^*)$, оптимален по порядку на классе $\mathcal{E}$.

В теоремах 1-4 существенным образом использованы условие /3/ и компактность множеств Z^*, Z_0^* и Z_1^*, что достигается за счет полной непрерывности оператора H. При нарушении последнего условия эти теоремы, вообще говоря, уже не имеют места. Тем не менее в случае компактности множества $Y^* = \{y\}$ можно получить аналоги некоторых из указанных теорем. Для примера остановимся на следующем результате.

Т е о р е м а 5. Пусть уравнения /1/ и /2/ таковы, что

/12/ $$\|H\| \leqq q < 1, \quad \|H_N\| \leqq q < 1 \quad (N = 1,2,\dots),$$

а Y^* - компакт в X. Тогда для классов уравнений $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}_N$, определяемых соотношениями /1/, /2/, /2^0/, /12/, справедливы оценки

/13/ $$d_N(HX^*) \asymp v_N(\mathcal{E}) \leqq v(\mathcal{E};H_N^0), \quad X^* \equiv K^{-1}Y^*$$

и метод /2^0/, удовлетворяющий любому из условий

/14/ $$v(\mathcal{E};H_N^0) \asymp d_N(HX^*), \quad \sup\{\|Hx - H_N^0 x\| : x \in X^*\} \asymp d_N(HX^*),$$

является оптимальным по порядку на классе $\mathcal{E}$.

С л е д с т в и е. Пусть $H_N = P_N H$, $H_N^0 = P_N^0 H$, где P_N, P_N^0- линейные операторы размерности не выше N. Тогда в условиях теремы 5 $v_N(\mathcal{E}) \asymp \lambda_N(HX^*)$, и метод /$2^0$/ с оператором $H_N^0 = P_N^0 H$, удовлетворяющим условию $\sup\{\|Hx - P_N^0 Hx\| : x \in X^*\} \asymp \lambda_N(HX^*)$, оптимален по порядку на классе $\mathcal{E}$.

Следует отметить, что в частных случаях задания пространства X и оператора H приведенные выше общие теоремы значительно упрощаются и усиливаются. Например, если X - сепарабельное гильбертово пространсво, а H - самосопряженный вполне непрерывный оператор, то аппроксимационные числа $s_N(H)$ можно определить через собственные значения этого оператора /см. [8]/, что позволяет придать теоремам более определенный вид; кроме того, в рассматриваемом случае полезно использовать также недавно установленную связь /см., напр., [4] / между поперечниками и аппроксимационными числами вполне непрерывных операторов.

<u>4. Некоторые приложения.</u> Теоремы 1-5 имеют многочисленные приложения при оптимизации приближенных методов, описываемых схемой /1/, /2/. Остановимся на одном из таких приложений, а именно, рассмотрим

оптимизацию методов вырожденных ядер для однозначно разрешимых интегральных уравнений вида

$$Kx \equiv x(t) - \int_a^{\sigma(t)} h(t,\tau)x(\tau)d\tau = y(t)\ , a \leqq t \leqq b, \tag{15}$$

в пространстве $X = C[a,b]$ с обычной нормой, где $\sigma(t)=t$ /случай уравнения Вольтерра/ или $\sigma(t)=b$ /случай уравнения Фредгольма/, а $h(t,\tau)$ и $y(t)$ - известные непрерывные функции своих аргументов. На практике это уравнение часто решается различными вариантами метода вырожденных ядер [9] :

$$K_N x \equiv x(t) - \int_a^{\sigma(t)} h_N(t,\tau)x(\tau)d\tau = y(t),\ a \leqq t \leqq b, \tag{16}$$

где $h_N(t,\tau) = \sum_{k=1}^{N} A_k(t)B_k(\tau)$ - вырожденное аппроксимирующее ядро, а $\{A_k(t)\}$, $\{B_k(t)\}$ - некоторые системы непрерывных функций, хотя бы одна из которых линейно независима.

Пусть далее функции $y(t) \in S(0,1) \subset C[a,b]$, $h(t,\tau) \in W^r H^\omega$ /по каждой из переменных в отдельности равномерно относительно другой из переменных/, где r - целое неотрицательное число, а $\omega = \omega(\delta)$, $0 < \delta \leqq b-a$, данный модуль непрерывности; кроме того, ядра $h(t,\tau)$ предполагаются такими, что выполняются неравенства /4/ /для этого в случае $\sigma(t) = t$ достаточно, чтобы ядра $h(t,\tau)$ были равномерно ограниченными/. Тем самым класс $\mathcal{H}$, а следовательно, и класс $\mathcal{E}$ вполне определяются.

Т е о р е м а 6. Справедлива оценка

$$V_N(\mathcal{E}) \asymp N^{-r}\omega(N^{-1}) ,$$

и метод /16/ с вырожденным ядром $h_N = h_N^0(t,\tau)$, удовлетворяющим условию

$$\sup_{h \in W^r H^\omega}\ \max_{a \leqq t \leqq b} \int_a^b |h(t,\tau) - h_N^0(t,\tau)|\, d\tau = O\{N^{-r}\omega(N^{-1})\} , \tag{17}$$

является оптимальным по порядку на классе $\mathcal{E}$ уравнений /15/.

С л е д с т в и е. Пусть, для определенности, $[a,b] = [-1,1]$, а

$$Q_{N,\lambda}(\varphi;t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N-1} a_k \{1-(1-\lambda_k)^{r+1}\} T_k(t)\ , \varphi \in C[-1,1] , \tag{18}$$

где

$$a_k = a_k(\varphi) = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} (1-t^2)^{-1/2} T_k(t)\varphi(t)dt\ ,\ T_k(t) = \cos(k \arccos t) ,$$

или

$$a_k = a_{k,N}(\varphi) = \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N} \varphi(t_i)T_k(t_i)\ ,\ t_i = \cos\frac{2i-1}{2N}\pi ,$$

а числа $\lambda_k=\lambda_{k,N}$ определяются по любой из формул

/18/ $$\lambda_{k,N}=\cos\frac{k\pi}{2N-1},\ \lambda_{k,N}=\frac{k\pi}{2N}\operatorname{ctg}\frac{k\pi}{2N},\quad k=\overline{1,N-1}.$$

Тогда методы с вырожденными ядрами $h_N^o=Q_{N,\lambda}^t h(t,\tau)$ при $h\in W^rH^\omega$ по t, $h_N^o=Q_{N,1}^\tau h(t,\tau)$ при $h\in W^rH^\omega$ по τ, $h_N^o=Q_{N,\lambda}^t\left[Q_{N,1}^\tau h(t,\tau)\right]$ при $h\in W^rH^\omega$ являются оптимальными по порядку на классе $\mathcal{E}$ уравнений /15/, где операторы $Q_{N,\lambda}^t(Q_{N,1}^\tau)$ применяются по переменной $t(\tau)$, причем $\lambda=1$ соответствует случаю $\lambda_{k,N}=1$, $k=\overline{1,N-1}$.

З а м е ч а н и е 1. Если при $\sigma=b$ интегральный оператор из /15/ является сжимающим, то теорема 6 и ее следствие значительно упрощаются; тогда из нее можно получить, в частности, результат работы [10] об оптимальности по порядку сплайн-метода.

5. Доказательства теорем. Все теоремы, приведенные выше, доказываются с помощью результатов книги автора [1]. Поэтому мы ограничимся, в основном, указанием схем доказательств, отсылая за деталями к соответствующим разделам монографии [1].

Сначала остановимся на доказательстве теоремы 2. В условиях этой теоремы существует обратный оператор K^{-1}, поэтому для любого $y\in X$ имеем $x^*=K^{-1}y=(E-H)^{-1}y$. Так как $H_N\longmapsto H$ по норме пространства $L(X)$ и

$$K_N=K\left[E-K^{-1}(H_N-H)\right]=\left[E-(H_N-H)K^{-1}\right]K,$$

то хотя бы при N таких, что $q_N\equiv\|K^{-1}\|\,\|H-H_N\|<1$, операторы $K_N\in L(X)$ непрерывно обратимы и

$$K_N^{-1}=\sum_{i=0}^{\infty}\left[K^{-1}(H_N-H)\right]^iK^{-1}=\sum_{i=0}^{\infty}K^{-1}\left[(H_N-H)K^{-1}\right]^i.$$

Поэтому для любых $y\in X$ имеем $x_N^*=K_N^{-1}y=(E-H_N)^{-1}y$ и

$$x^*-x_N^*=\sum_{i=0}^{\infty}\left[K^{-1}(H_N-H)\right]^ix^*=\sum_{i=0}^{\infty}K^{-1}\left[(H_N-H)K^{-1}\right]^iy,$$

$$\|K^{-1}-K_N^{-1}\|\asymp\|H-H_N\|,\quad \|K_N^{-1}\|\sim\|K^{-1}\|.$$

Отсюда для любого $y\in X$ находим асимптотическую оценку

/19/ $$\|x^*-x_N^*\|\sim\|K^{-1}(H-H_N)x^*\|=\|K^{-1}(H-H_N)K^{-1}y\|.$$

Поэтому в рассматриваемом случае имеем

/20/ $$\|K^{-1}(H-H_N)K^{-1}\|\sim\|K^{-1}-K_N^{-1}\|\sim\|K_N^{-1}(H-H_N)K_N^{-1}\|.$$

Отсюда легко получаем утверждение теоремы 2.

Теперь докажем теорему 3. Нетрудно видеть, что

$$\|H-H_N\|\,\|K\|^{-2}\leq\|K^{-1}(H-H_N)K^{-1}\|\leq\|H-H_N\|\,\|K^{-1}\|^2,$$

так что $\|K^{-1}(H-H_N)K^{-1}\|\asymp\|H-H_N\|$. Отсюда с учетом обозначений п.2 получаем двустороннюю оценку

/21/ $$v_N(\mathcal{E}) \asymp \inf\{\|H-H_N\| : H_N \in \mathcal{H}_N\} = s_N(H) ,$$

откуда и следует одно из утверждений теоремы 3. Для завершения доказательства введем в уравнениях /1/ и /2/ соответственно замены

/22/ $$x = y + z, \ x_N = y + z_N ,$$

где z и z_N - новые искомые элементы. Ясно, что для определения z и z_N имеем соответственно уравнения

/23/ $$Kz \equiv z - Hz = Hy, \ K_N z_N \equiv z_N - H_N z_N = H_N y .$$

Обозначим решения последных уравнений соответственно через z^* и z_N^* ; ясно, что z_N^* является элементом из конечномерного подпространства $X_N \equiv R(H_N)$ размерности не выше N , где $R(H_N)$ - область значений оператора H_N . Поэтому в силу /1/, /2/, /22/ и /23/ имеем

/24/ $$\|x^*-x_N^*\| = \|z^*-z_N^*\| \geqq E_N(z^*) \equiv \rho(z^*, X_N) ,$$

где $E_N(z^*)$ - наилучшее приближение элемента $z^* \in R(H) \subset X$ элементами из $X_N \subset X$. С помощью соотношений /23/ и /24/ находим оценку

/25/ $$v_N(\mathcal{E}) \geqq d_N(Z_0^*) , \quad Z_0^* \equiv K^{-1} HS(0,1).$$

Ясно, что с учетом оценок /21/ и /25/ приходим к неравенствам /10/, откуда, как и в главе II [1], выводится утверждение теоремы 3.

Теперь остановимся вкратце на доказательстве теоремы 1. В условиях этой теоремы, как нетрудно показать, справедливы соотношения

/26/ $$v_N(\mathcal{E}) \geqq \inf_{\substack{X_N \subset X: \\ \dim X_N \leqq N}} \ \sup_{\substack{H \in \mathcal{H} \\ y \in Y^*}} \ \inf_{H_N : X \to X_N} \|z^* - z_N^*\|_X \geqq$$
$$\geqq \inf_{\substack{X_N \subset X: \\ \dim X_N \leqq N}} \ \sup_{z^* \in Z^*} E_N(z^*) = d_N(Z^*), \ Z^* \equiv \{z^*\},$$

/27/ $$v_N(\mathcal{E}) = \inf_{H_N \in \mathcal{H}_N} \ \sup_{H \in \mathcal{H}} \ \sup_{y \in S(0,1)} \|x^* - x_N^*\| \asymp s_N(\mathcal{H}).$$

Отсюда и из теоремы 3 /с учетом сказанного при ее доказательстве/ выводится /как и в главе II [1]/ теорема 1.

Заметим, что теорема 1 может быть доказана совершенно независимо от теоремы 3. Однако приведенный выше порядок доказательства этих теорем более удобен с точки зрения их изложения. Заметим еще, что несколько другим способом оценка /27/ доказана также в недавней работе [11].

Далее, теорема 4 доказывается примерно так же, как и теоремы 5 и 6 гл. II книги [1].

Для доказательства теоремы 5 отметим, что в силу /12/ справедливы неравенства

$$\|K\| \leqq 1+q, \quad (1+q)^{-1} \leqq \|K^{-1}\| \leqq (1-q)^{-1},$$
$$\|K_N\| \leqq 1+q, \quad (1+q)^{-1} \leqq \|K_N^{-1}\| \leqq (1-q)^{-1}.$$

Поэтому здесь погрешность приближенного решения можно оценить неравенствами

$$\frac{\|(H-H_N)x^*\|}{1+q} \leqq \|x^* - x_N^*\| \leqq \frac{\|(H-H_N)x^*\|}{1-q}$$

Из последних неравенств, пользуясь предложенной в гл. II [1] методикой доказательств, получаем утверждение теоремы 5 и ее следствия.

Переходя к доказательству теоремы 6, отметим, что здесь, в силу теоремы 1, как и в главе IV [1], находим

/28/ $$V_N(\mathcal{E}) \geqq d_N(Z^*) = d_N(W^rH^{\omega_*}, C) \asymp N^{-r}\omega(N^{-1}),$$

где $C=C[a,b]$, $\omega_*(\delta) \asymp \omega(\delta)$, $0<\delta \leqq b-a$. Отсюда и из /17/ выводится утверждение теоремы 6.

Переходя к доказательству следствия теоремы 6, отметим, что полиномы /18/, построенные с помощью обобщенных методов сумирования рядов Фурье-Чебышева и интерполяционных полиномов Лагранжа по узлам Чебышева первого рода, равномерно приближают классы функций W^rH^ω с тем же порядком, что и соответствующие полиномы наилучшего равномерного приближения; справедливость этого утверждения следует из лемм 4 и 5 работы [12] и леммы 21 гл.III книги [1]. С другой стороны, для полиномов $Q_{N,1}(\varphi;t)$ в пространстве $L_{2,\rho}(-1,1)$ с весом $\rho(t)=(1-t^2)^{-1/2}$ с помощью известных результатов /см.,напр.,[6,7,13]/находим оценку

$$\sup_{\varphi\in W^rH^\omega} \|\varphi - Q_{N,1}\varphi\|_{L_{2,\rho}} \leqq 2\sqrt{\pi} \sup_{\varphi\in W^rH^\omega} E_{N-1}(\varphi)_C,$$

где $E_m(\varphi)_C$ - наилучшее равномерное приближение функции $\varphi \in C[-1,1]$ алгебраическими многочленами степени не выше m. Поскольку подпространство указанных многочленов экстремально по порядку относительно множества W^rH^ω в пространстве $C[a,b]$, то [6,7] в силу предыдущей оценки получаем

$$\sup_{\varphi\in W^rH^\omega} \|\varphi - Q_{N,1}\varphi\|_{L_{2,\rho}} = O\{d_N(W^rH^\omega, C)\} \asymp N^{-r}\omega(N^{-1}).$$

Теперь, с учетом сказанного об аппроксимативных свойствах операторов $Q_{N,\lambda}$ и $Q_{N,1}$ в пространствах соответственно $C[-1,1]$ и $L_{2,\rho}(-1,1)$, для ядер $h_N^0(t,\tau)$, построенных в следствии теоремы 6, убеждаемся /после простых, но громоздких вычислений/ в спаведливости оценки /17/ Отсюда и из /28/, как и в теоремах 6, 8, 15 и 18 гл. IV книги [1], выводим требуемое утверждение.

З а м е ч а н и е 2. В заключение отметим, что результаты, аналогичные теореме 6 и ее следствию, могут быть получены также для приближенных методов решения сингулярных интегральных уравнений с ядрами Гильберта и Коши /см., напр., в [14] /.

Литература

1. Б.Г.Габдулхаев. Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. Казань, изд-во КГУ, 1980.
2. Б.Г.Габдулхаев. Оптимальные аппроксимации решений линейных уравнений. Третий республиканский симпозиум по дифференциальным и интегральным уравнениям, 1-3 июня 1982 г. Тезисы докладов. Одесса, изд-во ОГУ, 1982, с. 205-206.
3. Н.С.Бахвалов. Численные методы. Москва, Наука, 1973.
4. Х.Трибель. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. Москва, Наука, 1980.
5. A.Pietsch. S-numbers of operators in Banach spaces. Studia Math., 51, 1974, p.201-223.
6. Н.П.Корнейчук. Экстремальные задачи теории приближения. Москва, Наука, 1976.
7. В.М.Тихомиров. Некоторые вопросы теории приближений. Москва, Наука, 1976.
8. Д.Э.Аллахвердиев. О скорости приближения вполне непрерывных операторов конечномерными операторами. Учен. записки Азерб. ун-та, 1957, №2, с. 27-35.
9. Л.В.Канторович, В.И.Крылов. Приближенные методы высшего анализа. Москва, Гостехиздат, 1962.
10. С.В.Переверзев. Об оптимальных по порядку методах приближенного решения интегральных уравнений Фредгольма. Укр. матем. журнал, 1980, т. 32, № 2, с. 181-188.
11. S.Heinrich. On the optimal error of degenerate Kernel Methods. Forschunsergebnisse, Fridrich-Schiller-Universität, Jena, N 84(2), 1984, p.1-23.
12. Б.Г.Габдулхаев, Г.Д.Велев. Оптимальные квадратурные формулы для сингулярных интегралов. Труды Междун. конф. по конструктивной теории функций, Варна - 1981. Изд-во БАН, София, 1983, с. 47-51.
13. Н.П.Натансон. Конструктивная теория функций. Москва, Гостехиздат, 1949.
14. Б.Г.Габдулхаев. Конечномерные аппроксимации сингулярных интегралов и прямые методы решения особых интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. Итоги науки и техники. Сер. Матем. анализ, том 18. Москва, изд-во ВИНИТИ АН СССР, 1980, с. 251-307.

Казанский государственный университет
им. В. И. Ульянова-Ленина
420008 Казань СССР

Висш икономически институт "Карл Маркс"
1185 София България