КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ'84
София, 1984, с. 27—32

CONSTRUCTIVE THEORY OF FUNCTIONS'84
Sofia, 1984, p. 27-32

ПОПЕРЕЧНИКИ ПО КОЛМОГОРОВУ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Э.М.Галеев

I. Введение. В работе определяются порядки поперечников по Колмогорову $d_N(\tilde{W}^{\bar\alpha}_{\bar p}, \tilde{L}_{\bar q})$ в пространстве $\tilde{L}_{\bar q}$ классов периодических функций многих переменных $\tilde{W}^{\bar\alpha}_{\bar p} = \bigcap_{i=1}^{m} \tilde{W}^{\alpha^i q}_{p}$, являющихся пересечением классов $\tilde{W}^{\alpha}_{p}$, определяемых в $\tilde{L}_p$ смешанной дробной производной по Вейлю, при $1 < p, q < \infty$. Вычисляется порядок поперечников $d_N(\tilde{H}^{\bar\alpha}_{p}, \tilde{L}_q)$ в пространстве $\tilde{L}_q$ классов периодических функций многих переменных $\tilde{H}^{\bar\alpha}_{p} = \bigcap_{i=1}^{m} \tilde{H}^{\alpha^i q}_{p}$, являющихся пересечением классов, определяемых в $\tilde{L}_p$ смешанной разностью, при $p \geq 2$ или при $q \geq 2$. Некоторые результаты о приближении классов $\tilde{W}^{\alpha}_{p}, \tilde{W}^{\bar\alpha}_{p}$, $\tilde{H}^{\alpha}_{p}$, $H^{\bar\alpha}_{p}$ имеются в работах [I] - [4].

Перейдем к точным формулировкам. Через $\tilde{L}_p = \tilde{L}_p(T^n)$, $p = (p_1, \dots, p_n)$, $1 < p_i < \infty$, $i = 1, \dots, m$, $T^n = [-\pi, \pi]^n$ — n-мерный тор, обозначим пространство периодических с периодом 2π по каждому аргументу функций $x(t) = x(t_1, \dots, t_n)$, для которых конечна смешанная норма

$$\|x\|_p = \left\{ \frac{1}{2\pi} \left[\dots \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x(t)|^{p_1} dt_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} \dots \right]^{\frac{p_n}{p_{n-1}}} dt_n \right\}^{\frac{1}{p_n}}.$$

Для функции с нулевыми средними по всем аргументам

$$x(t) = \sum_{k \in \mathring{Z}^n} x_k e^{i(k,t)}, \quad \text{где} \quad \mathring{Z}^n = \{ k \in Z^n \mid k_1 \dots k_n \neq 0 \}$$

(Z^n-n-мерная целочисленная решетка), и вектора $\alpha \in R^n$ введем операцию дробного дифференцирования по формуле

$$x^{(\alpha)}(t) = \sum_k \prod_{j=1}^n (ik_j)^{\alpha_j} x_k e^{i(k,t)}.$$

Каждому вектору $s \in Z_+^n$ сопоставим подмножество $\square_s \subset \overset{c}{Z}{}^n$ по следующему правилу:

$$\square_s = \{ k \in \overset{c}{Z}{}^n \mid 2^{s_j - 1} < |k_j| \leq 2^{s_j},\ j = 1, \dots, n \}.$$

Тогда

$$x(t) = \sum_k x_k e^{i(k,t)} = \sum_s \delta_s x(t),\quad \delta_s x(t) = \sum_{k \in \square_s} x_k e^{i(k,t)},$$

$$\widetilde{W}_p^\alpha = \{ x(\cdot) \mid \|x^{(\alpha)}\|_p \leq 1 \}.$$

Равенства и неравенства для векторов понимаются как покоординатные. Через $\mathbb{0}, \mathbb{1}, \mathbb{2}, \infty$ будем обозначать n-мерные вектора, состоящие только из нулей, единиц, двоек и бесконечностей соответственно, символ $\frac{1}{p}$ в R^n будет обозначать вектор $\left(\frac{1}{p_1}, \dots, \frac{1}{p_n}\right)$. Условимся функции $\xi(\theta)$ и $\eta(\theta)$ называть функциями одного порядка и писать $\xi \asymp \eta$, если существует константа θ_0 такая, что при $\theta > \theta_0$ $C_1\eta(\theta) \leq \xi(\theta) \leq C_2\eta(\theta)$, $C_1, C_2 > 0$. Аналогично определяются порядковые неравенства $\xi \succcurlyeq \eta$ и $\xi \preccurlyeq \eta$. Для $\alpha \in R$ обозначим

$$\alpha_+ = \begin{cases} \alpha & \text{при } \alpha \geq 0, \\ 0 & \text{при } \alpha < 0, \end{cases} \qquad \alpha_- = \begin{cases} 0 & \text{при } \alpha \geq 0, \\ \alpha & \text{при } \alpha < 0. \end{cases}$$

Любой вектор $\alpha \in R^n$ разложим в виде суммы двух векторов $\alpha = r + \beta$, таких, что $r \in Z^n$, $\mathbb{0} < \beta \leq \mathbb{1}$. Пусть $\widetilde{H}_p^\alpha$ -множество функций на T^n с нулевыми средними по всем аргументам, для которых

$$\|x\|_{p,\alpha} = \sup_{h \in T^n} \left\{ \|\Delta_h^2 x^{(r)}\|_p |h_1|^{-\beta_1} \dots |h_n|^{-\beta_n} \right\} \leq 1,$$

$\Delta_h^2 = \Delta_h \Delta_h$ - оператор смешанной разности с шагом h_j по переменной t_j.

При описании классов $\widetilde{H}_p^\alpha$ используется следующая эквивалентная нормировка [5]

$$\|x\|_{p,\alpha} \asymp \sup_s 2^{(\alpha,s)} \|\delta_s x\|_p.$$

Приближение множества W в пространстве X будем оценивать поперечником по Колмогорову $d_N(W,X)$, тригонометрическим поперечником $d_N^T(W,X)$ и величиной

$$G(W,S,X)=\sup_{x\in W}\|x-Sx\|_X,$$

где в качестве оператора $S: W\to X$ будет рассматриваться оператор Фурье.

Для множества $\Phi\subset Z_+^n$ оператор Фурье определяется следующим образом: если $x=\sum_{s\in Z_+^n}\delta_s x$, то $S_\Phi x=\sum_{s\in\Phi}\delta_s x$.

2. Формулировки теорем.

Теорема I. Пусть $\alpha\in R^n$, $0<\alpha_{i_1}=\ldots=\alpha_{i_l}<\alpha_{i_{l+1}}\le\ldots\le\alpha_{i_n}$. Тогда

$$d_N(\tilde W_p^\alpha,\tilde L_q)\asymp(N^{-1}\log^l N)^{\alpha_{i_1}},\quad 1<q\le p<\infty,$$

$$d_N(\tilde H_p^\alpha,\tilde L_q)\asymp(N^{-1}\log^l N)^{\alpha_{i_1}}(\log^l N)^{\frac12},\ 1<q\le p<\infty,\ p\ge 2.$$

Теорема 2. Пусть $\alpha^i\in R^n$, $i=1,\ldots,m$, $\operatorname{conv}\{\alpha^1,\ldots,\alpha^m\}\cap$ $\cap\operatorname{int}R_+^n\ne\emptyset$. Тогда

$$d_N(\tilde W_p^{\bar\alpha},\tilde L_q)\asymp(N^{-1}\log^l N)^{\frac1M},\quad 1<q\le p<\infty,$$

$$d_N(\tilde H_p^{\bar\alpha},\tilde L_q)\asymp N^{-\frac1M}(\log^l N)^{\frac1M+\frac12},\quad 1<q\le p<\infty,\ p\ge 2,$$

где M – значение, а l – размерность множества решений задачи $(s,1)\to\sup;\ (\alpha^i,s)\le 1,\ i=1,\ldots,m.$

Теорема 3. Пусть $\alpha^i\in R^n$, $i=1,\ldots,m$, $p=(p,\ldots,p)$, $q=(q,\ldots,q)$, $\Phi=\{s\ge0\mid(\alpha^i-\frac1p+\frac1q,s)\le1,\ i=1,\ldots,m\}$, $\operatorname{conv}\{\alpha^i-\frac1p+\frac1q,\ i=1,\ldots,m\}\cap\operatorname{int}R_+^n\ne\emptyset$. Тогда существует полиэдральное множество $\Phi'\supset\Phi$, $\operatorname{card}_\mu\Phi'\asymp\operatorname{card}_\mu\Phi$, такое, что

$$G(\tilde H_p^{\bar\alpha},S_{\mu\Phi'},\tilde L_q)\asymp_\mu 2^{-\mu}\asymp N^{-\frac1M}(\log^l N)^{\frac1M+\frac1q},\quad 1<p\le q<\infty,$$

где N – число гармоник в операторе Фурье $S_{\mu\Phi'}$, M – значение, а l – размерность множества решений задачи

$(s,1)\to\sup;\ s\in\Phi.$

Теорема 4. Пусть $\alpha^i \in R^n$, $i=1,\dots,m$, $\operatorname{conv}\{\alpha^i-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}, i=1,\dots,m\}\cap$ $\cap \operatorname{int} R^n_+ \neq \emptyset$,
$p=(p,\dots,p)$, $q=(q,\dots,q)$. Тогда

$$d_N(\tilde{W}^{\bar\alpha}_p, \tilde{L}_q) \asymp (N^{-1}\log^{\ell} N)^{\frac{1}{M}}, \quad 1<p\le q\le 2,$$

$$d^T_N(\tilde{H}^{\bar\alpha}_p, \tilde{L}_q) \asymp N^{-\frac{1}{M}}(\log^{\ell} N)^{\frac{1}{M}+\frac{1}{q}}, \quad 1<p\le q\le 2,$$

где M - значение, а ℓ - размерность множества решений задачи
$(s,\mathbb{1})\to\sup;\ (\alpha^i-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}, s)\le 1,\ i=1,\dots,m.$

Теорема 5. Пусть $p=(p,\dots,p)$, $\alpha^i\in R^n$, $i=1,\dots,m$,
$\operatorname{conv}\{\alpha^i-\frac{1}{p}, i=1,\dots,m\}\cap \operatorname{int} R^n_+\neq\emptyset$. Тогда

$$d_N(\tilde{W}^{\bar\alpha}_p, \tilde{L}_q) \asymp (N^{-1}\log^{\ell} N)^{\frac{1}{M}}, \quad 1<p\le 2\le q<\infty,$$

$$d_N(\tilde{H}^{\bar\alpha}_p, \tilde{L}_q) \asymp N^{-\frac{1}{M}}(\log^{\ell} N)^{\frac{1}{M}+\frac{1}{2}}, \quad 1<p\le 2\le q<\infty,$$

где M - значение, а ℓ - размерность множества решений задачи
$(s,\mathbb{1})\to\sup;\ (\alpha^i-\frac{1}{p}+\frac{1}{2}, s)\le 1,\ i=1,\dots,m.$

Теорема 6. Пусть $\alpha^i\in R^n$, $i=1,\dots,m$, $\operatorname{conv}\{\alpha^i-\frac{1}{2}, i=1,\dots,m\}\cap$ $\cap \operatorname{int} R^n_+\neq\emptyset$. Тогда

$$d_N(\tilde{W}^{\bar\alpha}_p, \tilde{L}_q) \asymp (N^{-1}\log^{\ell} N)^{\frac{1}{M}}, \quad 2\le p\le q<\infty,$$

$$d_N(\tilde{H}^{\bar\alpha}_p, \tilde{L}_q) \asymp N^{-\frac{1}{M}}(\log^{\ell} N)^{\frac{1}{M}+\frac{1}{2}}, \quad 2\le p\le q<\infty,$$

где M - значение, а ℓ - размерность множества решений задачи
$(s,\mathbb{1})\to\sup;\ (\alpha^i, s)\le 1,\ i=1,\dots,m.$

3. Идеи доказательств. Оценки сверху в теоремах I-4 следуют из приближения этих классов суммами Фурье [2] и оценки числа гармоник в логарифмически полиэдральном множестве [4] . В теоремах 5 и 6 оценка сверху поперечника функционального класса сводится путем дискретизации к оценке сверху конечномерных множеств. При этом используются некоторые идеи дискретизации, изложенные в работах [6] , [7] , а также следующее

Неравенство. Пусть $\alpha\in R^n$, $1<p<\infty$, $x=\sum_{s\in S}\delta_s x$, $S\subset Z^n_+$,

$\operatorname{card} S \stackrel{def}{=} |S|$. Тогда

$$|S|^{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)_-}\left(\sum_{s\in S}\|2^{(\alpha,s)}\delta_s x\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \|x^{(\alpha)}\|_p \le |S|^{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)_+}\left(\sum_{s\in S}\|2^{(\alpha,s)}\delta_s x\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

В теоремах I–2 оценки снизу функциональных классов сводятся к оценкам снизу конечномерных множеств с помощью некоторой теоремы Марцинкевича [8, с. 46] , обобщенной на случай функции нескольких переменных, и вышеупомянутого неравенства. Оценка снизу в теореме 3 достигается на функции $x=\sum_{s\notin\mu\varphi'} 2^{-(\alpha-\frac{1}{p}+1,\,s)}\delta_s$, где $\delta_s=\sum_{k\in\square_s} e^{i(k,t)}$.

При оценке снизу в теореме 4 существенно используются идеи из работ [2] , [3] . Оценки снизу в теоремах 5 и 6 сводятся соответственно к пространствам $\tilde{L}_2$ и $\tilde{L}_p$.

<u>Теорема</u> (обобщение теоремы Марцинкевича [8, с. 46]). Пусть $x(t)=x(t_1,\dots,t_n)$ – тригонометрический полином по переменной t_i степени не превышающей N_i, $i=1,\dots,n$, $1<p<\infty$. Тогда

$$\|x\|_{\tilde{L}_p} \asymp \left(N_1^{-1}\dots N_n^{-1}\sum_{j=0}^{N}|x(\xi^j)|^p\right)^{1/p},$$

где суммирование ведется по $j_i=0,1,\dots,N_i$, $i=1,\dots,n$, $\xi^j=\left(\frac{2\pi j_1}{1+2N_1},\dots,\frac{2\pi j_n}{1+2N_n}\right)$.

<u>Замечание.</u> При оценке сверху $d_N(\tilde{H}_p^{\bar\alpha},\tilde{L}_q)$ в теореме 6 можно не пользоваться вложением $\tilde{H}_p^{\bar\alpha}\subset\tilde{H}_2^{\bar\alpha}$, а проводить дискретизацию непосредственно для класса $\tilde{H}_p^{\bar\alpha P}$, сводя к поперечникам конечномерных множеств $d_n(B_p^m,\ell_q^m)$ и пользуясь известными оценками для этих поперечников. Тогда требование гладкости, при которых справедлива оценка $d_N(\tilde{H}_{p_1,\dots,p_n}^{\bar\alpha},\tilde{L}_q)$, можно ослабить: $\operatorname{conv}\{\alpha^i-1/\min(p_1,\dots,p_n),\,i=1,\dots,m\}\cap\operatorname{int}R_+\ne\emptyset$. Для класса функций одной переменной аналогичное замечание имеется в работе [6] .

ЛИТЕРАТУРА

I. Э.М.Галеев. Приближение некоторых классов периодических функций многих переменных суммами Фурье в метрике $\mathcal{L}_p$. – УМН, I977, т.32, в.4, с. 25I-252.

2. Э.М.Галеев. Приближение суммами Фурье классов функций с несколькими ограниченными производными. – Мат. заметки, I978, т. 22, в. 2, с. I97-2II.

3. В.Н.Темляков. Поперечники некоторых классов функций нескольких переменных. – ДАН СССР, I982, т. 267, № 2, с. 3I4-3I7.

4. Динь Зунг. О приближении периодических функций многих переменных. – УМН,I983, т.38, № 6, с. III-II2.

5. Н.С.Никольская. Приближение периодических функций класса SH^r_{p*} суммами Фурье. – Сиб. матем.ж., I976, т.I6, № 4, с. 76I-780.

6. Б.С.Кашин. О поперечниках классов Соболева малой гладкости. – Вестник МГУ, сер. матем. , мех., I98I, № 5, с. 50-54.

7. В.Е.Майоров. Дискретизация задачи о поперечниках. – УМН, I975, т.30, № 6, с. I79-I80.

8. А.Зигмунд. Тригонометрические ряды, т.II, – М., "Мир", I965.