КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ'84
София, 1984, с. 33—42

CONSTRUCTIVE THEORY OF FUNCTIONS'84
Sofia, 1984, p. 33-42

О СВОЙСТВАХ СФЕРИЧЕСКОГО ПОЛИНОМА НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Ариф С.ДЖАФАРОВ (Баку, СССР)

I. Пусть S^k - единичная сфера k-мерного $(k \geqslant 3)$ евклидова пространства, $C(S^k)$ и $L^p(S^k)$ $(1 \leq p < \infty)$, соответственно банаховы пространства определенных на S^k непрерывных и суммируемых в p-й степени функций с обычными нормами. Пусть, далее, $E_n(f)_p$ - наилучшее приближение функции $f \in L^p(S^k)$ $(1 \leq p \leq \infty; L^\infty(S^k) = C(S^k))$ посредством (k-мерных) сферических полиномов порядка не выше $n-1$, а $S_n(f;x)$ - сферический полином наилучшего приближения для $f(x)$, $x \in S^k$. Через $\mathcal{D}$ обозначим оператор Лапласа на S^k.

Справедливы следующие утверждения относительно свойств сферического полинома наилучшего приближения $S_n(f;x)$.

ТЕОРЕМА I. Если к функции $f \in C(S^k)$ применим r раз оператор $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}^r f \in C(S^k)$, то

$$\lim_{n \to \infty} \mathcal{D}^r S_n(f;x) = \mathcal{D}^r f(x)$$

равномерно относительно $x \in S^k$.

Эта теорема является аналогом соответствующей теоремы И.Стейна [I] для 2π-периодических функций.

На самом деле имеет место следующее более общее утверждение: если $\mathcal{D}^r f \in L^p(S^k)$, $1 \leq p \leq \infty$, то для любого сферического полинома $S_n(x)$ порядка $n-1$ справедливо неравенство

$$(\mathrm{I}) \quad \| \mathcal{D}^r f - \mathcal{D}^r S_n \|_p \leq C_1 E_n(\mathcal{D}^r f)_p + C_2 n^{2r} \| f - S_n \|_p,$$

где C_1, C_2 - постоянные, независящие от n и f.

ТЕОРЕМА 2. Для того чтобы $(1 \leq q \leq \infty, -\infty < \gamma < \infty)$

$$\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left[n^{\gamma}E_n(f)_p\right]^q n^{-1}\right\}^{1/q}<\infty,$$

необходимо и достаточно, чтобы $(\tau>\gamma/2)$

$$\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left[n^{\gamma-2\tau}\|\mathcal{D}^{\tau}S_n(f)\|_p\right]^q n^{-1}\right\}^{1/q}<\infty.$$

Эта теорема является аналогом соответствующей теоремы Г.Суноути [2] для 2π-периодических функций.

2.Остановимся на общих прямых и обратных теоремах о порядке наилучших приближений на многомерной сфере, на которых основываются доказательства теорем I–2.Подробные доказательства этих общих прямых и обратных теорем при $k=3$, $p=\infty$ имеются в [3,4]. Эти доказательства сохраняются и при $k>3$, $1\leq p<\infty$ (несколько иначе выводится аналог теоремы Джексона). Поэтому достаточно указать лишь их узловые моменты.

Рассмотрим последовательность функционалов вида

$$\mathcal{D}_{n,m}^{(\nu,\mu)}(\Phi)=\left[\mathrm{J}_n^{[m]}(\nu,\mu)\right]^{-1}\int_0^{\pi}\Phi(t)\,\mathcal{D}_n^{[m]}(\cos t)\sin^{\nu}\frac{t}{2}\cos^{\mu}\frac{t}{2}\,dt,$$

где $\nu\geqslant 0$, $\mu\geqslant 0$ – вещественные числа, m – натуральное,

$$\mathrm{J}_n^{[m]}(\nu,\mu)=\int_0^{\pi}\mathcal{D}_n^{[m]}(\cos t)\sin^{\nu}\frac{t}{2}\cos^{\mu}\frac{t}{2}\,dt,\quad \mathcal{D}_n^{[m]}(\cos t)=\left[\frac{\sin\frac{nt}{2}}{n\sin\frac{t}{2}}\right]^{2m}$$

– обобщенное ядро Джексона. Имеет место следующая основная

<u>ЛЕММА I.</u> При условии $2m\geqslant\nu+2$ справедлива оценка

$$\left|\mathcal{D}_{n,m}^{(\nu,\mu)}(\Phi)\right|\leq\frac{C(m,\nu,\mu)}{n^{2m-\nu-1}}\sum_{l=1}^{n}l^{2m-\nu-2}\,W[\Phi]\left(\frac{\pi}{l}\right),$$

где $C(m,\nu,\mu)$ зависит лишь от m, ν, μ, а

$$W[\Phi](\delta)=\sup_{0<h\leq\delta}\frac{1}{h}\int_0^{h}|\Phi(t)|\,dt.$$

Лемма I доказывается так же,как теорема I из [5] с использованием только монотонности (и неотрицательности) величины $W[\Phi](\delta)$.

Теорему I из [5] легко вывести теперь из леммы I.

Рассмотрим, действующий в пространстве $L(S^k)$ $(k \geq 3)$, линейный интегральный оператор вида

$$\mathcal{D}_n^{[m]}(f;x) = \frac{1}{\gamma_n^{[m]}} \int_{S^k} f(y)\, \mathcal{D}_n^{[m]}[(x,y)]\, dS(y)$$

где (x,y) - скалярное произведение единичных векторов x и y,

$$\gamma_n^{[m]} = |S^{k-1}| \int_0^{\pi} \mathcal{D}_n^{[m]}(\cos\gamma) \sin^{k-2}\gamma\, d\gamma,$$

$|S^{k-1}|$ - полная поверхность единичной сферы S^{k-1}. И пусть

$$W[f;x](\delta) = \sup_{0<u\leq\delta} \frac{1}{u} \int_0^u |f_h(x) - f(x)|\, dh,$$

где

$$f_h(x) = \frac{1}{|S^{k-1}| \sin^{k-2} h} \int_{(x,y)=\cos h} f(y)\, dt(y).$$

Поскольку

$$(2) \quad |f(x) - \mathcal{D}_n^{[m]}(f;x)| \leq$$

$$\leq \frac{|S^{k-1}|}{\gamma_n^{[m]}} \int_0^{\pi} |f(x) - f_h(x)|\, \mathcal{D}_n^{[m]}(\cos t) \sin^{k-2} t\, dt,$$

то непосредственно из леммы I (с учетом равенства $\sin t = 2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}$) следует [7]

<u>ТЕОРЕМА 3.</u> При любом натуральном n справедлива оценка*)

$$|f(x) - \mathcal{D}_n^{[m]}(f;x)| \leq \frac{C_3}{n^{2m-k+1}} \sum_{l=1}^{n} l^{2m-k}\, W[f;x]\left(\frac{\pi}{l}\right).$$

Для $f \in L^p(S^k)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ в (2) модуль можно заменить (в силу обобщенного неравенства Минковского) нормой в $L^p(S^k)$,

---

*) Здесь и ниже C_1, C_2, ... обозначают положительные постоянные, независящие от n и f.

что приводит к теореме 3, в которой модули заменены на нормы в $L^p(S^k)$. Отсюда нетрудно вывести сферический аналог теоремы Джексона для функций $f \in L^p(S^k)$, $k \geq 3$, $1 \leq p \leq \infty$ (при $k \geq 3$, $p=\infty$ см. [6,7]) в виде (заметим, что значение оператора $\mathcal{D}_n^{[m]}(f;x)$ есть k-мерный сферический полином порядка $m(n-1)$).

<u>ТЕОРЕМА 4</u>. При условии $2m-1 \geq k$ для любого n

$$E_n(f)_p \leq \frac{C(m,k)}{n^{2m-k+1}} \sum_{\ell=1}^{n} \ell^{2m-k} \omega(f;\tfrac{\pi}{\ell})_p, \tag{3}$$

где

$$\omega(f;\delta)_p = \sup_{0<h\leq\delta} \|f - f_h\|_p$$

- сферический модуль непрерывности функции $f \in L^p(S^k)$.

<u>ПРИМЕЧАНИЕ I.</u> Вид этой теоремы, таким образом, связано с тем, что при её доказательстве используется только монотонность (и неотрицательность) величины $\omega(f;\delta)_p$. Павелке в [9] получил теорему 4 в традиционной форме, основываясь на одном дополнительном свойстве величины $\omega(f;\delta)_p$. Из этого же свойства следует, что при $2m-3 \geq k$ правая часть (3) по порядку эквивалентна $\omega(f;\frac{1}{n})_p$. Заметим, также, что в [9] вместо обобщенного ядра Джексона используется ядро другого вида. Далее, примечание I из [8] имеет место также относительно неравенства (3).

<u>ТЕОРЕМА 5.</u> Для любого натурального r

$$E_n(f)_p \leq \frac{c_4}{n^{2r}} E_n(\mathcal{D}^r f)_p .$$

Эта теорема при $k=3$, $p=\infty$ получена в [4]. Очевидно, что достаточно доказать её при $r=1$. Доказательство теоремы 5 для этого случая основывается на частном случае теоремы 4 при $\omega(f;\delta)_p \leq M\delta^2$ в этом случае $E_n(f)_p \leq C_5 M/n^2$, при $2m-3 \geq k$. При этом используются (для случая $k=3$, $p=\infty$ см. [3]) следующие две леммы.

<u>ЛЕММА 2.</u> Если функция g, являющаяся результатом применения

оператора $\mathcal{D}$ к другой функции, допускает в метрике $L^p(S^k)$ приближение сферическими полиномами порядка не выше n с погрешностью ε_n, то можно построить сферический полином того же порядка, но без свободного члена, который дает приближение функции g с погрешностью $2\varepsilon_n$.

<u>ЛЕММА 3</u>. Если $f \in L^p(S^k)$, $\mathcal{D}f \in L^p(S^k)$, то

$$\omega(f;\delta)_p \leq C_6 \cdot \delta^2 \|\mathcal{D}f\|_p .$$

Лемма 2 доказывается просто, лемма 3 следует из леммы 4.2.3 и леммы 4.2.I работы Беренса, Бутцера и Павелке [IO].

Объединение теорем 4-5 даёт при $p = \infty$ теорему 4 статьи [6], из которой непосредственно следует теорема I из [7]. Теорема I из [7] при $k=3$ доказана в [4].

Перейдем теперь к обратным теоремам о порядке наилучших приближений на S^k, $k \geqslant 3$. Подробные доказательства приводимых ниже теорем при $k=3$, $p=\infty$ имеются в [3]. Эти доказательства переносятся и на случай $k>3$, $1 \leq p < \infty$, основываясь на следующем сферическом аналоге неравенства С.Н.Бернштейна (см.[7, 9], а также [II]).

<u>ЛЕММА 4</u>. Для любого k-мерного $(k \geqslant 3)$ сферического полинома S_n порядка не выше n при любом натуральном r

$$\|\mathcal{D}^r S_n\|_p \leq C(r,p)\, n^{2r} \|S_n\|_p \quad (1 \leq p \leq \infty).$$

<u>ЛЕММА 5.</u> Пусть $f \in L^p(S^k)$, S_n - сферический полином порядка не выше n, и пусть

$$\|f - S_n\|_p \leq F_n, \quad \|\mathcal{D} S_n\|_p \leq G_n .$$

Тогда

$$\omega(f;\delta)_p \leq C_7 \cdot \min_n \{\delta^2 G_n + F_n\} \quad (0<\delta\leq 1).$$

При доказательстве используются полуаддитивность $\omega(f;\delta)_p$ относительно f и лемма 3.

ЛЕММА 6. Если

$$\|f-S_n\|_p \leq F_{n+1} \quad (F_1 \geqslant F_2 \geqslant \dots \geqslant F_n \geqslant \dots),$$

то для любого натурального τ

$$\|\mathcal{D}^\tau S_n\|_p \leq C_9 \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{2\tau-1} F_\nu .$$

Доказательство основывается только на лемме 4.

ТЕОРЕМА 6. При всяком натуральном $n \leq \delta^{-1}$ $(0<\delta \leq 1)$

$$\omega(f;\delta)_p \leq \frac{C_{10}}{n^2} \sum_{\nu=1}^{n} \nu E_\nu(f)_p .$$

Теорема следует из леммы 5 и леммы 6 при $\tau=1$.

ЛЕММА 7. Если в условиях леммы 6

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{2\tau-1} F_n < \infty \quad (\tau \text{ - натуральное}),$$

то

$$\|\mathcal{D}^\tau f-\mathcal{D}^\tau S_n\|_p \leq C_{11} \Big\{ n^{2\tau} F_{n+1} + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{2\tau-1} F_\nu \Big\}.$$

Доказательство основывается только на лемме 4. Из леммы 7 в качестве следствия вытекает

ТЕОРЕМА 7. Если

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{2\tau-1} E_n(f)_p < \infty ,$$

то

$$E_n(\mathcal{D}^\tau f)_p \leq \|\mathcal{D}^\tau f-\mathcal{D}^\tau S_n(f)\|_p \leq$$

$$\leq C_{12} \Big\{ n^{2\tau} E_n(f)_p + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{2\tau-1} E_n(f)_p \Big\}.$$

ТЕОРЕМА 8. В условиях теоремы 7 для любого $n \leq \delta^{-1}$ $(0<\delta \leq 1)$

$$\omega(\mathcal{D}^\tau f;\delta)_p \leq C_{13} \Big\{ \frac{1}{n^2} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{2\tau+1} E_\nu(f)_p + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{2\tau-1} E_\nu(f)_p \Big\}.$$

Теорема выводится из теоремы 7 и лемм 5-6.

ТЕОРЕМА 9. Пусть функция $\varphi(\delta)$ удовлетворяет (B_2)- условию Н.К.Бари [I2] . Тогда

$$\omega(f;\delta)_p \sim \varphi(\delta) \iff E_n(f)_p \sim \varphi\left(\frac{1}{n}\right).$$

Теорема выводится из теоремы 4, теоремы 6, и леммы 6 из [I2].

<u>ТЕОРЕМА IO.</u>Пусть функция $\varphi(\delta)$ удовлетворяет (B)-условию Н.К.Бари [I2] и $r \geq 0$ -целое. Тогда все соотношения

$$E_n(\mathcal{D}^i f)_p \sim \frac{1}{n^{2r-2i}}\varphi\left(\frac{1}{n}\right) \quad (i = 0, 1, \ldots, r)$$

эквивалентны.Это имеет место и для $\mathcal{O}$- соотношений.

Теорема выводится из теоремы 5, теоремы 7 данной заметки, и леммы 5 работы [I2].

3.Несколько слов о доказательствах утверждений п.I. В основе доказательства неравенства (I) лежит лемма 4 данной заметки и теорема 3.4 из [9]. При $S_n(x) = S_n(f;x)$ правая часть (I), в силу теоремы 5, стремится к нулю при $n \to \infty$. Отсюда при $p = \infty$ следует теорема I. Теорема 2 доказывается точно так, как аналогичные теоремы из [I3], используя соответствующие прямые и обратные теоремы из п.2 данной заметки. Отметим при этом, что в [I3] мы основываемся на схему работы Г.Суноути [2].

4.В связи с задачей Дирихле для уравнения Лапласа в шаре трехмерного евклидова пространства в [I4, I5] были нами введены на основе метрики C сферические аналоги B-классов (B - пространств) О.В.Бесова. Там же изучены вопросы об эквивалентной нормировке с помощью наилучших приближений посредством сферических полиномов,установлены полнота и взаимные вложения этих пространств.Результаты п.2 позволяют соответствующие утверждения из [I4, I5] по B-классам перенести на случай функций из $L^p(S^k)$, $k \geq 3$, $1 \leq p \leq \infty$. В равномерной метрике ($p = \infty$) эти результаты были получены ранее (см. [I6]).

Пусть $\varphi(\delta) \downarrow 0$ при $\delta \to +0$ и

$$\mathcal{I}_q^{\varphi}[F] = \left[\int_0^1 t^{-1}\varphi^{-q}(t) F^q(t)\,dt\right]^{1/q} \quad (1 \leq q \leq \infty).$$

Обозначим через $B^{r,\varphi}_{p,q}(S^k)$ класс всех функций $f\in L^p(S^k)$, для которых
$$\mathcal{J}\equiv \mathcal{J}^{\varphi}_{q}[\omega(\mathcal{D}^r f;t)_p]<\infty.$$

Исходя из $\omega(f;\delta)_p$ определим величину
$$\Omega(f;\delta)_p=\sup_{0<x\le\frac{\pi}{\delta}}\frac{\omega(f;x\delta)_p}{(1+x)^2}.$$

ПРИМЕЧАНИЕ 2. В [I4 , I5] в определении пространства $B^{r,\varphi}_{\infty,q}(S^3)$ вместо величины $\omega(f;\delta)_\infty$ использовалась величина $\Omega(f;\delta)_p$. Из более поздних результатов о взаимосвязи $\omega(f;\delta)_p$ с К-функционалом Петре следует, что $\Omega(f;\delta)_p\sim\omega(f;\delta)_p$. Поэтому в рассматриваемом круге вопросов $\Omega(f;\delta)_p$ и $\omega(f;\delta)_p$ взаимнозаменяемы.

ТЕОРЕМА II. Пусть функция $\varphi(\delta)$ удовлетворяет $(\mathcal{L}_2)$ - условию С.М.Лозинского[I2]. Тогда $B^{r,\varphi}_{p,q}(S^k)$ является банаховым пространством с нормой
$$\|f\|_{B^{r,\varphi}_{p,q}}=\|f\|_p+\mathcal{J}.$$

Для функций $f\in L^p(S^k)$ положим
$$\mathfrak{S}\equiv\mathfrak{S}^{r,\varphi}_{p,q}[f]=\left\{\sum_{i=0}^{\infty}2^{2rqi}\varphi^{-q}\left(\frac{1}{2^i}\right)E^q_{2^i}(f)_p\right\}^{1/q}\quad(1\le q\le\infty).$$

ТЕОРЕМА I2. При условиях предыдущей теоремы
$$^{(1)}\|f\|_{B^{r,\varphi}_{p,q}}=\|f\|_p+\mathfrak{S}\qquad(\mathfrak{S}<\infty)$$
является нормой в пространстве $B^{r,\varphi}_{p,q}(S^k)$, эквивалентной норме $\|f\|_{B^{r,\varphi}_{p,q}}$.

ПРИМЕЧАНИЕ 3. На случай $k>3$, $1\le p<\infty$ обобщаются также теорема 8 и соответствующие утверждения из [I5] относительно вложения пространства $B^{r,\varphi}_{p,q}(S^k)$ (для случая $k=3$, $p=\infty$ см. [I5], стр.88-92).

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

I . E. Stein, Functions of exponential type, Ann. Math., 65 (1957), 582-592.

2 . G. Sunouchi, Derivatives of a Trigonometric Polynomial of Best Approximation, «Abstract spaces and Approximation», Reprint from ISNM, Vol. 10, 1969, 233-241.

3 . Ар.С.Джафаров, Некоторые результаты о наилучших приближениях на сфере и в шаре и их приближения, Канд.диссертация, Тбилиси, I964.

4 . Ар.С.Джафаров, Сферический модуль непрерывности и наилучшее приближение функций на сфере посредством сферических сумм, Изв.АН Азерб.ССР, № 5/I968/, 3-9.

5 . Ар.С.Джафаров, Об одном обобщении теоремы Д.Джексона - С.Б.Стечкина, Ученые записки АГУ, № 2/I973/, I9-25.

6 . Ар.С.Джафаров, О сравнении некоторых классов непериодических функций, Сообщ. АН Груз.ССР, Т.64, № 3/I97I/, 54I-544.

7 . Ар.С.Джафаров, О сферических аналогах классических теорем Д.Джексона и С.Н.Бернштейна, ДАН СССР, т.203, № 2/I972/,278-28I.

8 . Ар.С.Джафаров, Осредненные модули непрерывности и некоторые связи их с наилучшими приближениями, ДАН СССР, т.236, № 2/I977/, 288-29I.

9 . S. Pawelke, Über die Approximationsordnung bei Kugelfunktionen und algebraischen Polynomen, Tôhoku Math. J., 24, N3 (1972), 473-486.

I0 . H. Berens, P.L. Butzer, S. Pawelke, Limitierungsverfahen von Reihen mehrdimensionaler Kugelfunktionen und deren Saturationsverhalten, Publ. Res. Inst. Math. Sci., Ser. A 4 (1968), 201-268.

II . Ар.С.Джафаров, Об экстремальных свойствах сферических и алгебраических полиномов, В сб."Приближение обобщенными аналитическими и сферическими функциями, Баку-I983", 8-34.

I2 . Н.К.Бари, С.Б.Стечкин, Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций, Тр.Моск.матем.общ., т.5/I956/, 483-522.

I3 . Ар.С.Джафаров, Г.И.Мухтаров, Х.М.Булакбаев, Конструктивное описание обобщенных классов Гёльдера, Докл.АН Азерб.ССР,т.34, № 9/I978/, I2-I6.

I4 . Ар.С.Джафаров, Наилучшее приближение конечными сферическими суммами и некоторые дифференциальные свойства гармонических в шаре функций, В сб."Теоремы вложения и их приложения,Москва-I970", 75-8I.

I5 . Ар.С.Джафаров, Некоторые применения теории наилучших приближений функций посредством конечных сферических сумм к изучению структурных свойств гармонических в шаре функций, В сб."Специальные вопросы функционального анализа и их применения к теории дифференциальных уравнений и теории функций, Баку-I968", 58-96.

I6 . Ар.С.Джафаров, Некоторые свойства решения задачи Дирихле для шара, В сб."Применение методов теории функций и функционального анализа к задачам математической физики, Новосибирск-I978", 75-79.