КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ'84
София, 1984, с. 43—48

CONSTRUCTIVE THEORY OF FUNCTIONS'84
Sofia, 1984, p. 43-48

ПРИБЛИЖЕНИЕ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ НА ТОРЕ, ЗАДАВАЕМЫХ СМЕШАННЫМ МОДУЛЕМ НЕПРЕРЫВНОСТИ

Динь Зунг

<u>I. Введение</u>. Будем использовать следующие обозначения: $\mathbb{T}^n$ - n-мерный тор; для $t \in \mathbb{R}^n$ t_j - j-ая координата t $(j=1,\dots,n)$; т.е. $t=(t_1,\dots,t_n)$; $2^t=(2^{t_1},\dots,2^{t_n})$; неравенства векторов понимаются по координатам; $\varepsilon_n=(1,1,\dots,1)$; для $C \subset \mathbb{R}^n$ $\mathrm{conv}\, C$ - выпуклая оболочка C, $C^o=\{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x,y\rangle \leqslant 1, y \in C\}$ - поляра C, $C^o_+ = C^o \cap \mathbb{R}^n_+$, $\mathcal{H}(C)=C+\mathbb{R}^n_-$. Далее, для неотрицательных функций F и Φ на абстрактном множестве X символ $F(x) \ll \Phi(x)$, $x \in X$ означает, что $F(x) \leqslant c\,\Phi(x)$, $x \in X$ при некоторой константе $c>0$, а символ $F(x) \asymp \Phi(x)$, $x \in X$ равносилен соотношениям $F(x) \ll \Phi(x)$, $x \in X$ и $\Phi(x) \ll F(x)$, $x \in X$ (F и Φ имеют один итот же порядок на X). Если $X=[a,\infty)$ при некотором $a>0$ ($X=(0,b)$ при некотором $b>0$, то еще пишем $F(x) \asymp \Phi(x)$, $x \to \infty$ ($x \to 0$) и т.д.

Пусть для $h \in \mathbb{R}^n$, $\Delta^2_h = \Delta_h \circ \Delta_h$, Δ_h - оператор смешанной конечной разности с шагом h_j по переменному t_j. Для обобщенной функции x на $\mathbb{T}^n$ положим

$$\Omega(t,x)_p = \sup_{|h_j| \leqslant t_j} \|\Delta^2_h x\|_p \quad (1 \leqslant p \leqslant \infty)$$

(подробности о обобщенных функциях на одномерном торе см. в [I], а для обобщенных функций на n-мерномторе все совершенно аналогично).

Мы говорим, что функция $\Omega: \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ принадлежит классу смешанных модулей непрерывности $\Omega \in$ СМН, если Ω удовлетворяет условиям

(а) $\Omega(t) \geqslant 0$, $\Omega(0)=0$, $t \in \mathbb{R}^n_+$

(б) $\Omega(t) \leqslant \Omega(t')$, $t \leqslant t'$, $t,t' \in \mathbb{R}^n_+$

(в) $\Omega(t+t') \leqslant \Omega(t)+\Omega(t')$, $t,t' \in \mathbb{R}^n_+$.

Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $\alpha \in \mathbb{R}^n_+$, $\Omega \in$ СМН. Через $W^\alpha H^\Omega_p$ обозначим пространство обобщенных функций x на $\mathbb{T}^n$, для которых конечна полунорма

$$\|x\|_{W^\alpha H_p^\Omega} = \sup_{t \geqslant 0} \{\Omega(x,t)_p / \Omega(t)\},$$

где $x^{(\alpha)}$ - дробная производная порядка α по Вейлю обобщенной функции x (см. [I]), а через $SW^\alpha H_p^\Omega$ - множество обобщенных функций x из $W^\alpha H_p^\Omega$, для которых $\|x\|_{W^\alpha H_p^\Omega} \leqslant 1$ (для $\alpha = 0$ $SW^\alpha H_p^\Omega = SH_p^\Omega$)

Классы $SW^\alpha H_p^\Omega$ являются естественными обобщениями классов функций одного переменного, модуль непрерывности (гладкости) r-ой производной которых не превосходит заданного модуля непрерывности. В [2-3 рассматривались классы типа Никольского SH_p^α, $\alpha \in \mathbb{R}^n$, - частные случаи классов $SW^\alpha H_p^\Omega$, которые определятся следующим образом. Вектор α представим в виде суммы двух векторов: $\alpha = r + \beta$, $r \in \mathbb{Z}^n$, $\beta \in (0,1]^n$. Положим $SH_p^\alpha = SW^r H_p^\Omega$, где $\Omega(t) = t_1^{\beta_1} \dots t_n^{\beta_n}$. Классы, родственные SH_p^Ω, исследовались в работах Потапова (см. [4]).

В работе рассматриваются следующие вопросы: теоремы представления и теоремы вложения пространств $W^\alpha H_p^\Omega$, асимптотически наилучшее приближение суммами Фурье с заданным числом гармоник и колмогоровские поперечники классов $SW^\alpha H_p^\Omega$.

2. Представление и вложение. Ради простоты изложения будем рассматривать только функции с нулевыми средними по свем переменным. Для обобщенной функции x положим

$$\delta_k x = \sum_{s \in \square_k} x_s e^{i\langle s,\cdot\rangle} \quad (k \in \mathbb{N}^n)$$

где x_s - коэффициенты Фурье x, $\square_k = \{ s \in \mathbb{Z}^n \mid 2^{k_j - 1} \leqslant |s_j| \leqslant 2^{k_j} \}$

Теорема I. Пусть $1 < p < \infty$, $p^* = \min\{p, 2\}$, $\alpha \in \mathbb{R}^n$, $\Omega \in$ СМН. Для того чтобы имело место соотношение

$$\|x\|_{W^\alpha H_p^\Omega} \asymp \sup_{k \in \mathbb{N}^n} \{2^{\langle \alpha, k\rangle} \Omega^{-1}(2^{-k}) \|\delta_k x\|_p\}, \; x \in W^\alpha H_p^\Omega,$$

необходимо и достаточно чтобы выполнились неравенства

$$\int_0^{t_j} \Omega^{p^*}(t_1, \dots, h_j, \dots, t_n) h_j^{-1} dh_j \ll \Omega^{p^*}(t_1, \dots, t_j, \dots, t_n) \qquad (\mathrm{I})$$
$$t_j \geqslant 0, \; j = 1, \dots, n$$

Функцию $\Omega \in$ СМН, удовлетворяющую условиям (I), назовем p-регулярной. Теорема I является аналогом теоремы представления Никольского [5] для функций с доминизирующей смешанной производной, удовлетворяющей кратному условию Гельдера.

Теорема 2. Пусть $1 < p \leqslant q \leqslant 2$ или $1 < p < q < \infty$, $\alpha \in \mathbb{R}^n$, $\Omega \in$ СМН - p-регулярна. Тогда имеет место следующее соотношение

$$W^{\alpha}H_p^{\Omega} \hookrightarrow L_q \iff \sum_{k\in\mathbb{N}^n}\{2^{-\langle \alpha-(1/p-1/q)\varepsilon_n,k\rangle}\Omega(2^{-k})\}^q<\infty$$

Эта теорема есть аналог для функций многих переменных теоремы вложения Ульянова [6]. Она доказывается спомощью обобщенной теоремы Литтльвуда-Пэли, теоремы I, а также следующего неравенства. Если $1<p\leqslant q\leqslant 2$ или $1<p<q<\infty$, то

$$\|x\|_q \ll \Big(\sum_{k\in\mathbb{N}^n}\{2^{(1/p-1/q)\langle\varepsilon_n,k\rangle}\|\delta_k x\|_p\}^q\Big)^{1/q}$$

на множестве обобщенных функций x на $\mathbb{T}^n$ таких, для которых правая часть поледнего неравенства конечна.

3. Приближение суммами Фурье. Пусть W - множество обобщенных функций на $\mathbb{T}^n$, $\gamma\subset\mathbb{Z}^n$. Положим

$$S_\gamma x=\sum_{s\in\gamma}x_s e^{i\langle s,\cdot\rangle}\ ;\quad G(W,S_\gamma,L_q)=\sup_{x\in W}\|x-S_\gamma x\|_q\ ;$$

$\mathcal{T}_\gamma$ - пространство обобщенных функций спектр которых лежит в γ; для $\vartheta\subset\mathbb{R}^n$ $\gamma(\vartheta)=\{\cup\square_k \mid k\in\vartheta\cap\mathbb{N}^n\}$ (если ϑ - пересечение полупространства с $\mathbb{R}^n_+$, то ϑ называют гиперболическим крестом)

Спрашивается, как следует отбирать множества γ, чтобы оператор Фурье S_γ дал асимптотически наилучшее приближение с заданным числом гармоник классов $SW^{\alpha}H_p^{\Omega}$. В работе дан ответ на этот вопрос для классов $SW^{\alpha}H_p^{\Omega}$ с специальной функцией Ω (см. далее).

Для выпуклого компакта с непустой внутренностью $\vartheta\subset\mathbb{R}^n$ и $\alpha\in\mathbb{R}^n$ рассмотрим следующую задачу выпуклого программирования

$$\langle\alpha,x\rangle\to\sup\ ,\ x\in\vartheta .$$

Положим $\theta=\theta(\vartheta,\alpha)=\max\{\langle\alpha,x\rangle\mid x\in\vartheta\}$ - значение этой задачи, $r=r(\vartheta,\alpha)=\dim\{x\in\vartheta\mid\langle\alpha,x\rangle=\theta\}$ - размерность множества её решений, $s=s(\vartheta,\alpha)=n-1-r$ и

$$\varphi(h)=\varphi(\vartheta,\alpha,h)=(\mathrm{mes}_{n-1}\{x\in\vartheta\mid\langle\alpha,x\rangle=\theta-h\})^{1/s}$$

Оказывается, что

$$\varphi(h)\asymp\omega(\vartheta,\alpha,h)\ ,\ h\to 0\ ,$$

где $\omega(\vartheta,\alpha,\cdot)$ есть некоторый модуль непрерывности, зависящий от ϑ и α, при $s>0$ и $\omega(\vartheta,\alpha,\cdot)\equiv 1$ при $s=0$ (см. [3]).

Теорема 3. Пусть $\alpha\in\mathbb{R}^n$, $\mathcal{A}\subset(0,1]^n$ - компакт, $\mathcal{B}=\mathcal{A}+\alpha-(1/p-1/q)_+\varepsilon_n$, $0\in\operatorname{int}\mathcal{K}(\mathcal{B})$, $\Omega(t)=\min\{t_1^{\beta_1}\dots t_n^{\beta_n}\mid\beta\in\mathcal{A}\}$ $1<p,q<\infty$, p,q удовлетворяют одному из следующих условий

$$1<q\leqslant p<\infty\ ,\ p\geqslant 2 \qquad (2)$$

$$1<p\leq q\leq 2 \quad \text{или} \quad 1<p<q<\infty \tag{3}$$

Тогда имеет место следующее соотношение

$$\inf\{G(SW^{\alpha}H_p^{\Omega}, S_{\gamma(w)}, L_q)\mid w\subset\mathbb{R}^n,\ \mathrm{card}\,\gamma(w)\leq m\}\asymp$$
$$\asymp m^{-1/\theta}\{\log^{n-1}m\ \omega^s(1/\log m)\}^{1/\theta+1/q^*},\ m\to\infty, \tag{4}$$

если же $\mathcal{A}$ - конечное множество, то

$$\inf\{G(SW^{\alpha}H_p^{\Omega}, S_{\gamma(w)}, L_q)\mid w\subset\mathbb{R}^n,\ \mathrm{card}\,\gamma(w)\leq m\}\asymp$$
$$\asymp m^{-1/\theta}\{\log^r m\}^{1/\theta+1/q^*},\ m\to\infty \tag{5}$$

При этом нижняя грань в (4)-(5) с точностью до порядка достигается на множестве $\gamma(\xi\{\mathcal{A}+\alpha\}_+^0)$ ($\xi=\xi(m)$) ,являющемся пересечением (в (4) или конечным пересечением (в (5)) гиперболических крестов.

Здесь $\theta=\theta(\mathcal{B}_+^0,\varepsilon_n)$, $r=r(\mathcal{B}_+^0,\varepsilon_n)$, $s=s(\mathcal{B}_+^0,\varepsilon_n)$, $\omega(\cdot)=\omega(\mathcal{B}_+^0,\varepsilon_n,\cdot)$, $q^*=2$ для случая (2) и $q^*=q$ для случая (3) .

Теорема 3 доказывается на основе обобщенной теоремы Литтльвуда--Пэли, оценок сумм от экспонент, зависящих от параметра, см. 2-3 а также следующего факта. Пусть в условиях теоремы 3 Ω - произвольная p-регулярная функция из СМН. Тогда справедливо соотношение

$$G(SW^{\alpha}H_p^{\Omega}, S_{\gamma(w)}, L_q)\asymp\Big(\sum_{k\in\mathbb{N}^n\setminus w}\{2^{-\langle\alpha-(1/p-1/q)\varepsilon_n,k\rangle}\Omega(2^{-k})\}^{q^*}\Big)^{1/q^*},$$
$$w\subset\mathbb{R}^n.$$

4. Поперечники. Напомним, что m-мерный колмогоровский поперечник множества A в нормированном пространстве X - это величина

$$d_m(A,X)=\inf_{L_m}E(A,L_m,X),$$

где нижняя грань берется по всем линейным многообразиям размерности $\leq m$, $E(A,L_m,X)$ - уклонение A от L_m в X .

Теорема 4. Пусть $1<q\leq p<\infty$, $p\geq 2$ или $1<p<q<\infty$, $q\geq 2$; $\alpha\in\mathbb{R}^n$, $\mathcal{A}\in(0,1]^n$- компакт; $\mathcal{B}=\mathcal{A}+\alpha-(1/p-1/2)_+\varepsilon_n$; $0\in\mathrm{int}\,\varkappa(\mathcal{B})$, причем $0\in\mathrm{int}\,\varkappa(\mathcal{A}+\alpha-1/p\,\varepsilon_n)$ для случая $p<q$, $q>2$;

$\Omega(t)=\min\{t_1^{\beta_1}\dots t_n^{\beta_n}\mid\beta\in\mathcal{A}\}$. Тогда имеет место следующее соотношение

$$d_m(SW^{\alpha}H_p^{\Omega}, L_q)\asymp m^{-1/\theta}\{\log^{n-1}m\ \omega^s(1/\log m)\}^{1/\theta+1/2},\ m\to\infty,$$

если же $\mathcal{A}$ - конечное множество, то

$$d_m(SW^{\alpha}H_p^{\Omega}, L_q) \asymp m^{-1/\theta}\{\log^r m\}^{1/\theta+1/2}, \quad m \to \infty,$$

где $\theta=\theta(\mathcal{B}_+^o, \varepsilon_n)$, $r=r(\mathcal{B}_+^o, \varepsilon_n)$, $s=S(\mathcal{B}_+^o, \varepsilon_n)$, $\omega(\cdot)= =\omega(\mathcal{B}_+^o, \varepsilon_n)$.

Частные случаи теорем 3-4 доказаны в [2-3] для пересечения классов SH_p^{α}. Аналогичные результаты получены Темляковым для классов, родственных SH_p^{α} (см. [7]).

Замечания. Рассмотрим более подробно колмогоровские поперечники классов периодических функций одного переменного SH_p^{ω}, где ω - - некоторый модуль непрерывности (для функций одного переменного множество СМН - это совокупность всех модулей непрерывности). При $1 \leq q \leq p \leq \infty$ и призвольном ω имеем

$$d_m(SH_p^{\omega}, L_q) \asymp \omega(1/m), \quad m \to \infty$$

При $1 \leq p \leq q \leq 2$ и ω, удовлетворяющем условию

$$\int_0^t \omega^q(h) h^{-q/p}\, dh \ll \omega^q(t) t^{1-q/p}, \quad t \to \infty \tag{6}$$

справедливо соотношение

$$d_m(SH_p^{\omega}, L_q) \asymp \omega(1/m)\, m^{1/p-1/q}, \quad m \to \infty$$

При $1<p<q<\infty$, $q>2$ и ω, удовлетворяющем условию

$$\int_0^t \omega(h) h^{-1-1/p}\, dh \ll \omega(t) t^{-1/p}, \quad t \to 0$$

имеет место соотношение

$$d_m(SH_p^{\omega}, L_q) \asymp \begin{cases} \omega(1/m)\, m^{1/p-1/2}, & p<2 \\ \omega(1/m), & p \geq 2 \end{cases}$$

При $1<p<q<\infty$, $q>2$ и ω, удовлетворяющем условиям (6) и

$$\int_t^{\pi} \omega(h) h^{-1-1/p}\, dh \ll \omega(t) t^{-1/p}, \quad t \to 0$$

справедливо соотношение

$$d_m(SH_p^{\omega}, L_q) \asymp \begin{cases} \omega(m^{-q/2})\, m^{q/2(1/p-1/q)}, & p<2 \\ \max\{\omega(1/m), \omega(m^{-q/2})\, m^{q/2(1/p-1/q)}\}, & p \geq 2 \end{cases}$$

Наконец, при $1 < p \leqslant 2$ и p-регулярном ω если H_p^ω вложено в L_q, (см. теорему 2), то

$$d_m(SH_p^\omega, L_2) \asymp \Big(\sum_{k \geqslant \log m} \{2^{(1/p-1/2)k}\omega(2^{-k})\}^2 \Big)^{1/2}, m \to \infty .$$

Таким образом, приведенные случаи показывают, что уже для функций одного переменного формулы, выражающие порядок колмогоровских поперечников классов SH_p^ω в метрике L_q, зависят не только от соотношения между p и q, но и от поведения функции ω.

Автор благодарит профессора В.М. Тихомирова за внимание к работе и ценные советы.

Литература

1. В.М.Тихомиров. Некоторые вопросы теории приближений. МГУ,Москва, 1976.
2. Динь_Зунг. О приближении классов периодических функций многих переменных. Успехи матем. наук, 1983, 38, №6, 111-112.
3. Динь_Зунг. Оценки некоторых интегралов, зависящих от параметра, и приближение гладких функций многих переменных. Труды Международной конференции по теории приближения функций, Киев 1983, Наука, Москва, 1984.
4. М.К.Потапов. Теоремы вложения в смешанной метрике. Труды МИАН СССР, 1980, 156, 143-155.
5. С.М.Никольский. Теорема о представлении одного класса дифференцируемых функций многих переменных поседством целых функций экспоненциального типа. ДАН СССР, 1963, 150, №3, 484-487.
6. П.Л.Ульянов. Вложение некоторых классов функций H_p^ω. Известие АН СССР, сер. матем., 1968, 32, №3, 649-686.
7. В.Н.Темляков. Поперечники некоторых классов функций многих переменных. ДАН СССР, 1982, 267, №2, 314-317.

Московский Государственный Университет
Механико-математический Факультет
Москва В-234 СССР