КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ
ФУНКЦИЙ'84
София, 1984, с. 61—65

CONSTRUCTIVE THEORY
OF FUNCTIONS'84
Sofia, 1984, p. 61-65

О РЯДАХ ФУРЬЕ ПО ОРТОГОНАЛЬНЫМ ПОЛИНОМАМ

Б.П. Осиленкер

I.Пусть L - разностный оператор Штурма - Лиувилля, порожденный вещественной якобиевой матрицей

$$/I/ \qquad J = \begin{pmatrix} \beta_0 & \alpha_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \alpha_0 & \beta_1 & \alpha_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \alpha_1 & \beta_2 & \alpha_2 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad (\alpha_k > 0,\ k = 0, 1, 2, \dots)$$

с ограниченными в совокупности элементами и μ - спектральная мера L, $\operatorname{supp}\mu = (a, b)$. Собственные функции $P_k(x)$ $(k = -1, 0, 1, \dots, P_{-1}(x) = 0, P_0(x) = \mathrm{const})$ образуют ортонормированную по мере μ на промежутке (a, b) систему полиномов k - той степени. Каждой функции $f \in L^2_\mu(a, b)$ поставим в соответствие ряд Фурье по системе $\{P_k\}$

$$/2/ \qquad f \sim \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}_k P_k, \quad \hat{f}_k = (f, P_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Ряды Фурье /2/ возникают во многих разделах математики и ее приложений. Исследованию их посвящено большое количество работ, результаты которых изложены, в частности, в монографиях [I]-[4]. Нашей целью является изучение вопросов сходимости и суммируемости рядов Фурье /2/. Основное внимание уделено нахождению порядка роста частных сумм и получению весовых оценок линейных средних рядов Фурье по ортонормированным полиномам. Результаты данной статьи являются обобщением и усилением соответствующих утверждений работ [2]-[8].

2. Порядок роста частных сумм. Обозначим

$$\mathfrak{M} = \{ x, x \in (a,b), \mu'(x) < \infty \}.$$

Т е о р е м а I.Предположим,что система ортонормированных полиномов $\{p_k\}$ равномерно ограничена на промежутке $[c,d] \subset (a,b)$:

/3/ $$\max_{c \le x \le d} |p_k(x)| \le M \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Тогда для любой функции $f \in L^1_\mu(a,b)$,принадлежащей $L^r_\mu\ (r \ge 1)$ на промежутке $E \equiv (a,c) \cup (d,b)$,в каждой точке Лебега $\lambda \in (c,d) \cap \mathfrak{M}$ для частных сумм $S_n(f,\lambda)$ ряда Фурье /2/ справедлива оценка

$$S_n(f,\lambda) \equiv S_n(f) = o_\lambda(1) \ln n + O_\lambda(1) \left(\|p_n\|_E^{r'} + \|p_{n+1}\|_E^{r'} \right), \quad \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1.$$

Будем говорить,что для пары измеримых на (a,b) неотрицательных функций (w,v) выполняется условие A_{pq} /$(w,v) \in (A_{pq})$ /,если существует постоянная $M>0$,не зависящая от $I \subset (a,b)$,и такая,что

$$\left(\int_I w \right) \left(\int_I v^{-\frac{1}{p-1}} \right)^{\left(1-\frac{1}{p}\right)q} \le M |I|^q \quad (1 \le p \le q < \infty).$$

Пара измеримых на (a,b) неотрицательных функций удовлетворяет условию S_{pq} /$(w,v) \in (S_{pq})$/,если существует постоянная $M>0$,не зависящая от промежутка $I \subset (a,b)$,и такая,что

$$\left(\int_I \left[T\left(\chi_I v^{-\frac{1}{p-1}}\right) \right]^q w \right)^{\frac{1}{q}} \le M \left(\int_I v^{-\frac{1}{p-1}} \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \quad (1 < p \le q < \infty),$$

где $T(g)$ - максимальная функция Харди - Литтлвуда для g ,а χ_I -характеристическая функция промежутка I .Весовая функция w удовлетворяет условию $C_r, r>0$ /$w \in (C_r)$/,если существуют постоянные $M>0$, $\varepsilon>0$ такие,что для любого множества G ,принадлежащего произвольному промежутку $I \subset (a,b)$,имеет место оценка

$$\int_I w \le M \left(\frac{|G|}{|I|} \right)^\varepsilon \int_a^b |T\chi_I|^r w.$$

Условия A_{pq} , C_r , S_{pq} ,соответственно,введены Макенхоуптом и Сойером [9],[10]/ подробнее об этом см. в[11]/.

Т е о р е м а 2.Предположим,что мера μ абсолютно непрерывна и система ортонормированных полиномов $\{p_k\}$ обладает интегрируемой мажорантой

/4/ $$|p_k(x)| \le \varphi(x) \quad \left(x \in (a,b),\ \varphi \in L^1_\mu(a,b),\ k \in \mathbb{N}\right)$$

Тогда для любой функции f, удовлетворяющей условию

/5/ $$f\varphi \in L^1_\mu(a,b),$$

выполняется оценка
$$\left\|\frac{S_*(f)}{\varphi}\right\|_{W,q} \le M \left\| f\varphi \frac{d\mu}{dx}\right\|_{V,p} \quad (1<p\le q<\infty),$$

где $W\in(C_{p+\varepsilon})$ / при некотором $\varepsilon>0$ / и $(W,V)\in(S_{pq})$.

Обозначим
$$S_*(f)\equiv S_*(f,x)\equiv \sup_{k\ge 0}\frac{|S_k(f,x)|}{\ln(k+2)}.$$

Т е о р е м а 3. Пусть выполняются условия теоремы 2. Тогда

I/ если для некоторых p, q /$1<p\le q<\infty$/ пара функций $(W,V)\in(S_{pq})$, то
$$\left\|\frac{S_*(f)}{\varphi}\right\|_{W,q} \le M \left\| f\varphi \frac{d\mu}{dx}\right\|_{V,p};$$

2/ если при некотором p, $1\le p<\infty$, пара функций $(W,V)\in(A_{pp})$, то
$$\left(\int_{\mathcal{E}_\zeta} W\right)^{\frac{1}{p}} \le M\,\frac{1}{\zeta}\left\| f\varphi \frac{d\mu}{dx}\right\|_{V,p},$$

где $\mathcal{E}_\zeta=\{x, x\in(a,b): \frac{S_*(f)}{\varphi}>\zeta, 0<\zeta<\infty\}$, а постоянная $M>0$ не зависит от f,ζ.

3. Суммируемость рядов Фурье. Обозначим
$$\Lambda=\{\lambda_k^{(n)}, \lambda_k^{(n)}\in\mathbb{R}^1, k=0,1,\dots,n,n+1;\ \lambda_0^{(n)}=1,\ \lambda_{n+1}^{(n)}=0,\ n=0,1,2,\dots\}$$

и каждой функции $f\in L^1_\mu(a,b)$ по ее ряду Фурье /2/ поставим в соответствие последовательность Λ - средних
$$U_n(f)\equiv U_n(f;x;\Lambda)\equiv\sum_{k=0}^{n}\lambda_k^{(n)}\hat{f}_k\,p_k(x).$$

Будем говорить, что треугольная матрица Λ принадлежит классу N, если выполняются следующие условия:

I/ при каждом фиксированном $k=0,1,2,\dots$ $\lim_{n\to\infty}\lambda_k^{(n)}=1$;

2/ справедлива оценка

/6/ $$\sup_{n\ge 0}\sum_{k=0}^{n}\frac{(k+1)(n-k+1)}{n+1}\ln\frac{3(n+1)}{n-k+1}|\Delta^2\lambda_k^{(n)}|<\infty.$$

Классу N принадлежат, например, средние Чезаро и Рисса положительного порядка.

Т е о р е м а 4. Предположим, что выполняются условия теоремы I и для элементов якобиевой матрицы /I/ имеет место оценка

/7/ $$\sup_{n\ge 0}\left\{\sum_{k=0}^{n}|\alpha_k-\alpha_{k+1}|+\sum_{k=0}^{n}|\beta_k-\beta_{k+1}|\right\}<\infty.$$

Если треугольная матрица Λ принадлежит классу N и

$$\left(\max_{0\le k\le n+2}\|p_k\|_E^{r'}\right)\cdot\sum_{k=0}^{n}\left|\Delta^2\lambda_k^{(n)}\right| = O(1)\ (n\to\infty),$$

то в каждой точке Лебега $x\in(c,d)\cap\mathfrak{M}$ функции f справедливо предельное равенство

$$\lim_{n\to\infty} V_n(f;x;\Lambda) = f(x).$$

Т е о р е м а 5.Пусть выполняются условия теоремы 2 и для элементов якобиевой матрицы J имеет место оценка /7/ и числа $\lambda_k^{(n)}$ удовлетворяют оценке /6/.Тогда

1/ если $(w,v)\in(A_{pq})$ при некоторых $p,q\ (1\le p\le q<\infty)$,то

$$\left\|V_n\cdot\frac{1}{\varphi}\right\|_{w,q}\le M\left\|f\varphi\frac{d\mu}{dx}\right\|_{v,p};$$

2/ если для некоторых $p,q\ (1<p\le q<\infty)$ пара функций $(w,v)\in(S_{pq})$, то

$$\left\|\sup_{n\ge0}|V_n|\cdot\frac{1}{\varphi}\right\|_{w,q}\le M\left\|f\varphi\frac{d\mu}{dx}\right\|_{v,p};$$

3/ если при некотором $p,\ 1<p<\infty$,пара функций (w,v) удовлетворяет условию (A_{pp}) ,то

$$\left(\int_{G_\xi} w\right)^{\frac{1}{p}}\le M\frac{1}{\xi}\left\|f\varphi\frac{d\mu}{dx}\right\|_{v,p},$$

где $G_\xi=\{x,x\in(a,b):\frac{1}{\varphi(x)}\sup_{n\ge0}|V_n(f)(x)|>\xi\}$,а постоянная $M>0$ не зависит от f,ξ.

Замечание I.Двухвесовые оценки средних Пуассона - Абеля ряда Фурье /2/ приведены в [I2].

Замечание 2.Условиям /3/,/4/,/7/ удовлетворяют,например,ортонормированные на $(-1,1)$ полиномы Якоби и Поллачека.

Замечание 3.Для интегралов Фурье по собственным функциям дифференциального оператора Штурма - Лиувилля на полуоси нами получены аналогичные результаты.

Л И Т Е Р А Т У Р А

I.Г.СегёОртогональные многочлены.Москва,I962.

2. G. Freud. Orthogonal polynomials. Perg. Press, 1971.

3.П.К.Суетин.Проблема В.А.Стеклова в теории ортогональных многочленов.Итоги науки и техники,Матем.анализ,I5,I977,5-82.

4. P. Nevai. Orthogonal polynomials. Mem. Amer. Math. Soc., 213, 1979, 1-185.

5.Б.П.Осиленкер.О линейных методах суммирования разложений Фурье по ортонормированным многочленам.Докл.Акад.Наук СССР,209,1973,40-42.

6.Б.П.Осиленкер.О сходимости и суммируемости разложений Фурье по ортонормированным полиномам,ассоциированным с разностными операторами второго порядка.Сиб. матем. журн.,15,1974,892 - 908.

7.Б.П.Осиленкер.Весовые оценки мажорант линейных средних рядов Фурье по ортогональным полиномам.Успехи матем. наук,35,1980,№-5,239 - 240.

8.Б.П.Осиленкер.О рядах Фурье - Поллачека.Докл. Акад. Наук СССР,265, 1982, -4,

9. B. Muckenhoupt. Weighted norm inequalities for the Hardy maximal functions. Trans. Amer. Math. Soc., 165, 1972, 207-226.

10. E. Sawyer. A characterization of a two-weighted norm inequalities for maximal functions. Stud. Math. (PRL), 75, 1982, v1, 1-14.

11.Е.М.Дынькин,Б.П.Осиленкер.Весовые оценки сингулярных интегралов и их приложения.Итоги науки и техники,Матем. анализ,21,1983,42 - 129.

12.Б.П.Осиленкер.Двухвесовые оценки интеграла Пуассона.VII Школа по теории операторов в функциональных пространствах.Тезисы докладов,2,Рига,1983,36 - 38.

Московский инженено-строительный
институт
113114 Москва Шлюзовая наб.8 СССР