КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ'84
София, 1984, с. 76—80

CONSTRUCTIVE THEORY OF FUNCTIONS'84
Sofia, 1984, p. 76-80

ТЕОРЕМА РЕГУЛЯРНОСТИ ДЛЯ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ЛИНЕЙНО-ИНВАРИАНТНЫХ СЕМЕЙСТВ ФУНКЦИЙ.

В.В.Старков.

Понятие линейно-инвариантного семейства функций введено Х.Поммеренке [I]. Семейство $\mathfrak{M}$ регулярных в круге $\Delta=\{|z|<1\}$ функций $f(z) = z + \ldots$ называется линейно-инвариантным, если

а) $f'(z)\neq 0$ в Δ (локальная однолистность),

б) для любых $a\in\Delta$ и $\theta\in[0,2\pi)$

$$(1)\qquad f_\theta(z,a)=\frac{f\left(\dfrac{z+a}{1+\bar a z}e^{-i\theta}\right)-f(ae^{-i\theta})}{f'(ae^{-i\theta})e^{-i\theta}(1-|a|^2)}=z+\ldots\in\mathfrak{M}$$

При этом порядком $\mathfrak{M}$ называется число $\sup\limits_{f\in\mathfrak{M}}\frac{|f''(0)|}{2}$. Универсальным линейно-инвариантным семейством порядка α в [I] называется объединение всех линейно-инвариантных семейств порядка не выше α. Оно обозначается $\mathcal{U}_\alpha$. Если $\alpha<1$, то $\mathcal{U}_\alpha=\emptyset$, при каждом $\alpha>1$ $\mathcal{U}_\alpha$ содержит бесконечнолистные функции.

Интерес к линейно-инвариантным семействам вызван тем, что многие изучающиеся классы конформных отображений являются линейно-инвариантными семействами и обладают рядом свойств, общих для всех линейно-инвариантных семейств. Примеры линейно- инвариантных семейств: $\mathcal{U}_1$ - класс выпуклых функций (см. [I]), класс S однолистных функций и многие другие (см., например, [2-4]).

Пусть $g(z)$ - непрерывная в Δ функция, $M(r,g)=\max\limits_{|z|\leq r}|g(z)|$,

$r \in (0,1)$. Под теоремой регулярности в некотором классе функций понимают утверждение о регулярности роста $M(r.f)$, $M(r,f')$ и т. п. для функций $f(z)$ этого класса. Теоремы регулярности получены в классе S (см. [5, стр. I20-I22] или [6, стр. 80-82]) и некоторых его обобщениях (см. [7]).

Здесь будут даны формулировки теоремы регулярности в $\mathcal{U}_\alpha$ и некоторых примыкающих к этой теореме результатов.

Обозначим $F = f(\Delta)$ риманову поверхность, на которую локально однолистная функция $f(z)$ отображает Δ. Пусть V - кривая на F, $\operatorname{diam} V$ - диаметр проекции V на плоскость, $l(V)$ - длина V (можно считать V кусочно гладкой). Пусть $w_1, w_2 \in F$, обозначим (см. [I]) $d(w_1,w_2) = \inf\limits_V \operatorname{diam} V$, $l(w_1,w_2) = \inf\limits_V l(V)$, где инфимум берется по всем кривым из F, связывающим w_1 и w_2.

Теорема I. (теорема регулярности в $\mathcal{U}_\alpha$).

Пусть $f(z) \in \mathcal{U}_\alpha$. Тогда

I) при каждом $\varphi \in [0,2\pi)$ величины $|f'(re^{i\varphi})| \dfrac{(1-r)^{\alpha+1}}{(1+r)^{\alpha-1}}$ и $M(r,f')\dfrac{(1-r)^{\alpha+1}}{(1+r)^{\alpha-1}}$ невозрастают по r на $(0,I)$;

2) обозначим $c_0 = \alpha 2^{1-\alpha}$, $c_m = \dfrac{2\alpha}{2^\alpha \cdot \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+m-1)}$ для натуральных m; существуют $\delta \in [0,1]$ и вещественное φ_0 такие, что для $k=0,I,2$ и для всех целых неотрицательных n

$$\delta = \lim_{r\to 1-0}\left[M(r,f^{(k)})(1-r)^{\alpha+k}c_k\right] = \lim_{r\to 1-0}\left[|f^{(n)}(re^{i\varphi_0})|(1-r)^{\alpha+n}c_n\right]$$

$$= \lim_{r\to 1-0}\left[M(r,d(f(z),0))(1-r)^{\alpha}c_0\right] = \lim_{r\to 1-0}\left[d(f(re^{i\varphi_0}),0)(1-r)^{\alpha}c_0\right]$$

$$= \lim_{r\to 1-0}\left[M(r,l(f(z),0))(1-r)^{\alpha}c_0\right] = \lim_{r\to 1-0}\left[l(f(re^{i\varphi_0}),0)(1-r)^{\alpha}c_0\right]$$

$$= \lim_{r\to 1-0}\left[\max_\varphi\left(\int_0^r |f'(\rho e^{i\varphi})|\,d\rho\right)(1-r)^{\alpha}c_0\right]$$

$$= \lim_{r\to 1-0}\left[\int_0^r |f'(\rho e^{i\varphi_0})|\,d\rho\,(1-r)^{\alpha}c_0\right] = \lim_{r\to 1-0}\left[\int_0^r M(\rho,f'')\,d\rho\,(1-r)^{\alpha+1}c_1\right].$$

3) $\delta = 1$ только для $f_\theta(z) = (e^{i\theta}/2\alpha)\left[\left(\dfrac{1+ze^{-i\theta}}{1-ze^{-i\theta}}\right)^{\alpha} - 1\right]$.

Число δ из теоремы 1 называют числом Хеймана функции $f(z)$, а φ_0 - направлением максимального роста $f(z)$. Направлением интенсивного роста (н.и.р.) функции $f(z)$ будем называть каждое $\theta \in [0,2\pi)$ такое, что $\lim\limits_{r\to 1-0}\left[|f'(re^{i\theta})|\frac{(1-r)^{\alpha+1}}{(1+r)^{\alpha-1}}\right] = \delta_\theta > 0$.

Обозначим $\mathcal{U}_\alpha(\delta)$ подкласс функций из $\mathcal{U}_\alpha$, которым соответствует одно число Хеймана δ.

В связи с линейной инвариантностью изучаемых здесь семейств интересно и важно для приложений (при доказательстве теоремы 1 используются теоремы 2 и 3) иметь информацию о числах Хеймана функций $f_\theta(z,a)$, если $f(z)\in\mathcal{U}_\alpha(\delta_0)$.

Теорема 2. Пусть $f\in\mathcal{U}_\alpha$, $f(z,a) = \dfrac{f\left(\frac{z+a}{1+\bar{a}z}\right) - f(a)}{f'(a)(1-|a|^2)}$.

1) Если $f\in\mathcal{U}_\alpha(0)$, то $f(z,a)\in\mathcal{U}_\alpha(0)$ для всех $a\in\Delta$.

2) Если $f\in\mathcal{U}_\alpha(\delta_0)$, $\delta_0\in(0,1)$, то для любого $\delta\in(\delta_0,1)$ существует $a\in\Delta$ такое, что $f(z,a)\in\mathcal{U}_\alpha(\delta)$.

3) Если $f\in\mathcal{U}_\alpha(\delta_0)$, $\delta_0\in(0,1)$ и существует интервал, свободный от (н.и.р.) $f(z)$, то для любого $\delta\in(0,1)$ существует $a\in\Delta$ такое, что $f(z,a)\in\mathcal{U}_\alpha(\delta)$.

Из теоремы 2 следует, в частности, что для получения информации о функциях из S_{δ_0}, $\delta_0\in(0,1)$, достаточно иметь соответствующую информацию о S_δ с δ сколь угодно близким к 1 и знать, как трансформируется эта информация при преобразованиях (1).

С помощью теоремы 2 удается просто получить утверждение об асимптотическом поведении $f(z)\in\mathcal{U}_\alpha$, когда $z\in\Delta$, $z\to e^{i\theta}$ (θ - (н.и.р.) $f(z)$) в некотором угле из Δ с вершиной в $e^{i\theta}$.

Теорема 3. Пусть $f\in\mathcal{U}_\alpha(\delta_0)$, $\delta_0>0$; θ - одно из (н.и.р.) $f(z)$, которому соответствует число Хеймана $\delta\in(0,\delta_0]$. Обозначим $r_0 = \sin\eta$, $c(\zeta) = \mathrm{Re}\{\zeta e^{-i\theta}\} - \mathrm{tg}\eta\,|\mathrm{Im}\{\zeta e^{-i\theta}\}|$, $\Phi(\zeta) = \arg f'(\rho(\zeta)e^{i\theta})$,

$$\rho(\zeta) = \sqrt{(1-r_0^2)^2/4r_0^4c^2(\zeta) - 1/r_0^2} - \frac{1}{2c(\zeta)}(1 - 1/r_0^2).$$

Тогда для каждого $n = 0,1,2,\dots$ и любого $\eta\in(0,\pi/2)$

$$\frac{f^{(n)}(\zeta)}{f_\theta^{(n)}(\zeta)} e^{-i\phi(\zeta)} \longrightarrow \delta$$ равномерно в

$$\Delta(R,\eta) = \{\zeta\in\Delta : |\arg(1-\zeta e^{-i\theta})| < \eta,\ R<|\zeta|<1\}$$

при $R\to 1-0$, т.е. $\forall\,\varepsilon>0\ \exists R_0>0$ такое, что

$$\left|\frac{f^{(n)}(\zeta)}{f_\theta^{(n)}(\zeta)} e^{-i\phi(\zeta)} - \delta\right| < \varepsilon$$ в $\Delta(R_0,\eta)$. ($f_\theta(z)$ – функция из теоремы 1).

Следствие. Множество всех (н.и.р.) функции $f(z)\in\mathcal{U}_\alpha$ не более чем счетно.

Приведем формулировки еще двух утверждений.

Теорема 4. Для любой функции $f(z)\in\mathcal{U}_\alpha(\delta_0)$ и любого $\delta\in[0,\delta_0]$ существует семейство функций $\psi(z|\lambda)\in\mathcal{U}_\alpha(\delta_0)$, $\lambda\in(0,1)$, такое, что $\psi(z|\lambda)\xrightarrow[\lambda\to 0]{} f(z)$ равномерно внутри Δ.

Теорема 5. Пусть $\alpha\geqslant 2$. Для любой функции $\varepsilon(r)>0$, $r\in[0,1)$, $\varepsilon(r)\xrightarrow[r\to 1-0]{} 0$, и любого $\delta\in[0,1)$ существует $f(z)\in\mathcal{U}_\alpha(\delta)$ такая, что

$$\lim_{r\to 1-0} \frac{2\alpha M(r,f)\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^\alpha - \delta}{\varepsilon(r)} = \infty .$$

Теоремы 4 и 5 ранее получены в классе S (см. [8] и [9], соответственно).

Литература.

1. Ch.Pommeerenke. Linear-invariante Familien analytischer Funktionen, I. Math.Ann. 155, 1964, 108-154.

2. V.Paatero. Über die konforme Abbildungen von Gebieten deren Ränder von beschränkter Drehung sind. Ann.Acad.Sci.Fenn. A, 33, 1931, 1-78.

3. В.В.Старков. О некоторых линейно-инвариантных семействах функций, имеющих интегральное представление. Изв. вузов математика. 1983, № 5, 82-85.

4. A.Goodman. On close to convex functions of higher order. Ann.Univ.Sci. Budapest Eötvös. Sect. Math., 15, 1972, 17-30.

5. Н.А.Лебедев. Принцип площадей в теориии однолистных функций. Москва, 1975.

6. И.М.Милин. Однолистные функции и ортонормированные системы. Москва, 1971.

7. В.К.Хейман. Многолистные функции. Москва, из-во ИЛ, 1960.

8. В.В.Старков. О подклассах S_α однолистных функций. Вестник ЛГУ, 1976, № 7, 82-87.

9. Н.А.Широков. О теореме регулярности Хеймана. Зап. научн. семинаров ЛОМИ АН СССР, 24, 1972, 182-200.

Адрес: СССР 185018 г. Петрозаводск, Петрозаводский университет, пр. Ленина, дом 33, физико-математический факультет, В.В.Старков.