КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ'84
София, 1984, с. 81—85

CONSTRUCTIVE THEORY OF FUNCTIONS'84
Sofia, 1984, p. 81-85

О СУММИРУЕМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ-ЛАПЛАСА НА СФЕРЕ

С.Б. ТОПУРИЯ

I. Определения и обозначения. R_k - k-мерное евклидово пространство; $x=(x_1,x_2,\dots,x_k)$, $y=(y_1,y_2,\dots,y_k)$ - точки /векторы/ пространства R_k; $(x,y)=\sum_{i=1}^{k} x_i y_i$ - скалярное произведение векторов из R_k; $|x|=\sqrt{(x,x)}$ - длина вектора x; $S^k=\{x;\, x\in R_k;\, |x|=1\}$ - единичная сфера, а $|S^k|=\frac{2\pi^{k/2}}{\Gamma(k/2)}$ - площадь ее поверхности; $L_p(S^k)$, $1\le p\le\infty$ $(L_1(S^k)=L(S^k))$ есть пространство функций $f(x)$ с нормой

$$\|f\|_{L_p(S^k)}=\left(\int_{S^k}|f(x)|^p\,dS^k(x)\right)^{1/p},\quad 1\le p<\infty.$$

В случае $p=\infty$ считаем, что пространство $L_\infty(S^k)=C(S^k)$ состоит из непрерывных функций с нормой

$$\|f\|_{L_\infty(S^k)}=\|f\|_{C(S^k)}=\max_{x\in S^k}|f(x)|.$$

Положим

$$S_h(f;x)=\frac{1}{|S^{k-1}|(\sin h)^{2\lambda}}\int_{(x,y)=\cos h} f(y)\,dS^{k-1}(y),\quad 2\lambda=k-2.$$

Интегральный модуль непрерывности в пространстве $L_p(S^k)$, $1\le p<\infty$ задается равенство

$$\omega_p(f;\delta)=\sup_{0<h\le\delta}\|S_h(f;x)-f(x)\|_{L_p(S^k)},$$

а если $f\in C(S^k)$, то равенством

$$\omega(f;\delta)=\sup_{0<h\le\delta}\|S_h(f;x)-f(x)\|_{C(S^k)}.$$

Пусть $f \in L(S^k)$, $k \geq 3$. Ее рядом Фурье-Лапласа называется ряд

$$S^\lambda(f;x) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n^\lambda(f;x), \tag{I}$$

где

$$Y_n^\lambda(f;x) = \frac{\Gamma(\lambda)(n+\lambda)}{2\pi^{\lambda+1}} \int_{S^k} P_n^\lambda[(x,y)] f(y)\, dS^k(y) \quad (n=0,1,2,\dots).$$

Функции $P_n^\lambda(t)$ называются многочленами Гегенбауера и определяются из разложения

$$(1-2ht+h^2)^{-\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^\lambda(t) h^n;$$

при $\lambda = \frac{1}{2}$ они являются полиномами Лежандра $P_n(t)$.

Обозначим через $\sigma_n^{\lambda,\alpha}(f;x)$ чезаровские средние (C,α), $\alpha > -1$ ряда Фурье-Лапласа (I), т.е.

$$\sigma_n^{\lambda,\alpha}(f;x) = \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{\alpha-1} S_\nu(f;x) = \frac{\Gamma(\lambda)}{2\pi^{\lambda+1}} \int_{S^k} \mathcal{P}_n^{\lambda,\alpha}(\cos\gamma) f(y)\, dS^k(y),$$

где

$$\mathcal{P}_n^{\lambda,\alpha}(\cos\gamma) = \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{\alpha} (\nu+\lambda) P_\nu^\lambda(\cos\gamma),$$

а $S_\nu(f;x)$ являются частичными суммами ряда (I), $\cos\gamma = (x,y)$, $x \in S^k$, $y \in S^k$.

2. Достаточные условия суммируемости ряда Фурье-Лапласа. Справедлива следующая теорема

Теорема I. Пусть $1 \leq p \leq 2$ и $f \in L_p(S^k)$, тогда

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n^{\lambda,\alpha}(f;x) = f(x)$$

почти всюду на S^k при

$$\alpha > (k-2)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right).$$

В настоящее время неизвестно, сходится ли почти всюду ряд Фурье-Лапласа функции класса $L_2(S^k)$. Поэтому представляют интерес достаточные условия, налагаемые на функцию класса $L_2(S^k)$ и обеспечивающие сходимость почти всюду ее ряда Фурье-Лапласа.

Пусть $\alpha(h)$ - неотрицательная невозрастающая на $[0,1]$ функция. Положим

$$\omega(\nu)=\int_{1/\nu}^{1}\alpha(h)\,dh, \quad \nu=1,2,\dots$$

Теорема 2. Если $f\in L_2(S^k)$, $k\geq 3$, и

$$\int_0^\delta h^4\alpha(h)\,dh=O\left(\delta^4\int_\delta^1\alpha(h)\,dh\right)\quad(\delta\to 0+),$$

то условия

$$\int_0^1\alpha(h)\,\|S_h(f;x)-f(x)\|^2_{L_2(S^k)}\,dh<\infty$$

и

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\omega(\nu)\int_{S^k}\left[Y_\nu^\lambda(f;x)\right]^2 dS^k(x)<\infty$$

эквиваленты.

Теорема 2 является аналогом теорем Л.И.Плеснера-П.Л.Ульянова ([I], стр.339-342) и Б.И.Голубова [2], доказанных соответственно для простых и кратных тригонометрических рядов Фурье.

Теорема 3. Если $f\in L_2(S^k)$, $k\geq 3$, и

$$\int_0^1\omega_2^2(f;h)\frac{\ln 1/h}{h}\,dh<\infty,$$

то

$$\lim_{n\to\infty}S_n(f;x)=f(x) \qquad (2)$$

почти всюду на S^k.

Следствие I. Если $f \in L_2(S^k), k \geq 3$, и при некотором $\varepsilon > 0$ выполняется условие

$$\omega_2(f;\delta) = O\left\{\frac{1}{\left(\ln\frac{1}{\delta}\right)^{1+\varepsilon}}\right\} \quad (\delta \to 0+)$$

или условие

$$\omega_2(f;\delta) = O\left\{\frac{1}{\ln\frac{1}{\delta}\left(\ln\ln\frac{1}{\delta}\right)^{1/2+\varepsilon}}\right\} \quad (\delta \to 0+),$$

то справедливо (2).

Неизвестно, сходятся ли почти всюду или в метрике $L(S^k)$ чезаровские средние $\sigma_n^{\lambda,\alpha}(f;x)$ ряда Фурье-Лапласа функции класса $L(S^k)$ при критическом показателе $\alpha = \lambda = \frac{k-2}{2}$.

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 4. Если

$$\int_0^{\pi} \frac{\omega_1(f;h)}{h}\,dh < \infty,$$

то $\sigma_n^{\lambda,\alpha}(f;x)$ сходится почти всюду на S^k при $\alpha = \lambda$.

Следствие 2. Если $f \in L(S^k), k \geq 3$, и при некотором $\varepsilon > 0$ интегральный подуль непрерывности

$$\omega_1(f;\delta) = O\left\{\frac{1}{\left(\ln\frac{1}{\delta}\right)^{1+\varepsilon}}\right\} \quad (\delta \to 0+),$$

то $\sigma_n^{\lambda,\alpha}(f;x)$ сходится почти всюду на S^k при $\alpha = \lambda$.

Теорема 5. Если

$$\omega_1(f;\delta) = o\left(\frac{1}{\ln\frac{1}{\delta}}\right),$$

то

$$\lim_{n\to\infty} \| \sigma_n^{\lambda,\alpha}(f;x) - f(x) \|_{L(S^k)} = 0$$

при $\alpha = \lambda$.

Литература

I. Н.К.Бари, Тригонометрические ряды, Москва, физматгиз, I96I.

2. Б.И.Голубов, О сходимости сферических средних Рисса кратных рядов Фурье, Матем. сб., 96 (I38):2 (I975), I89-2II.

Грузинский политехнический институт им.В.И.Ленина

380075, Тбилиси, ул.Ленина, 75, СССР