КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ'84
София, 1984, с. 86—90

CONSTRUCTIVE THEORY OF FUNCTIONS'84
Sofia, 1984, p. 86-90

О Н - СВОЙСТВЕ И ЕГО СВЯЗЬ С НЕКОТОРЫМИ ПОНЯТИЯМИ ВЫПУКЛОСТИ ЕДИНИЧНОЙ СФЕРЫ ПРОСТРАНСТВА БАНАХА

Станимир Л. Троянски

1. Введение. В [6] показано, что если норма банахова пространства строго выпукла и на единичной сфере совпадают нормированная и слабая топологии, то в можно ввести эквивалентную локально равномерно выпуклую норму. Цель настоящей заметки заменить в высше указанного результата совпадение нормированной и слабой топологией на сфере с совпадением нормированной и слабой секвенциальной сходимости на сфере. При этом однако потребуем, чтобы исходная норма обладала более сильное свойство, чем строгая выпуклость, а именно чтобы градиент нормы в каждой точке исходного пространства содержал точку, в которой норма сопряженного пространства была дифференцируема по Гато.

2. Определения. Норма банахова пространства X обладает H - свойством если на единичной сфере совпадают нормированная и слабая секвенциальная сходимости.

Норма банахова пространства X называется локально равномерно выпуклой (LUR), если из условия

$$\lim_n (\|x\|^2 + \|x_n\|^2 - \|x+x_n\|^2/2) = 0$$

следует, что

$$\lim_n \|x - x_n\| = 0$$

Норма банахова пространства X называется усредненно локально равномерно выпуклой ($ALUR$), если из условий

$$\lim_n \left(\int_0^1 \|x + x_n(t)\|^2 dt\right)^{1/2} = \|x\| \ , \ \int_0^1 x_n(t)\, dt = 0$$

следует, что

$$\lim_n \left(\int_0^1 \|x_n(t)\|^2 dt\right)^{1/2} = 0$$

Норма банахова пространства X называется симметрично локально равномерно выпуклой ($MLUR$), если из условия

$$\lim_n \left(\|x+x_n\|^2 + \|x-x_n\|^2 - 2\|x\| \right) = 0$$

следует, что

$$\lim_n \|x_n\| = 0$$

Норма банахова пространства X называется строго выпуклой (R), если единичная сфера пространства X не содержит прямолинейные отрезки.

Нетрудно видеть, что

$$LUR \Longrightarrow ALUR \Longrightarrow MLUR \Longrightarrow R .$$

Норма банахова пространства X называется дифференцируемой по Гато в точке $x \in X$, если для любого $y \in X$

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} \left(\|x+\tau y\| + \|x-\tau y\| - 2\|x\| \right) = 0 .$$

Норма банахова пространства X называется гладкой (S), если она дифференцируема по Гато в каждой точке $x \in X$, $x \neq 0$.

Будем говорить, что норма банахова пространства X обладает S^* - свойством, если для любого $x \in X$, $\|x\| = 1$, существует опорный линеный функционал x^* к элементу x (т.е. $x^*(x) = \|x^*\| = 1$) такой, что норма сопряженного пространства X^* дифференцируема по Гато в x^*.

Хорошо известно (см. напр. [1], стр. 30 - 32), что если норма банахова пространства X LUR, то она обладает H - свойством и S^* - свойством. Обратное неверно, более того дадим пример банахова пространства X, норма которого не является LUR, но тем не менее обладает H - свойствам, а норма сопряженного пространства X^* гладка.

3. В этом пункте сформулируем и докажем основной результат заметки.

<u>Предложение 3.1</u>. Пусть норма банахова пространства X обладает H - свойством и S^*- свойством, тогда она $ALUR$.

<u>Замечание 3.2</u>. В предыдущем предложении нельзя заменить свойство S^* с R. Как показал Смит [5] в l_1 можно построить эквивалентную R норму (очевидно обладающую H - свойством), но не являющуюся даже $MLUR$. Все таки Кадец [2] показал, что если R норма банахова пространства X обладает H - свойством и X не содержит подпространств изоморфных l_1, то эта норма $MLUR$. Неизвестно, при предположениях Кадеца, можно ли утверждать, что норма будет $ALUR$.

<u>Теорема 3.3</u>. Пусть норма банахова пространства X обладает H - свойством и S^* - свойством. Тогда в X существует эквивалентная LUR норма.

Доказательство теоремы вытекает из предложения 3.1 и следующего предложения

Предложение 3.4. ([6]) Пусть норма банахова пространства X является $ALUR$. Тогда в X существует эквивалентная LUR норма.

Доказательство предложения 3.1. Пусть $x \in X$, $\|x\|=1$, $x^* \in X^*$, $\|x^*\|=1$, $x^*(x)=1$ и норма пространства X^* дифференцируема по Гато в x^*. Пусть

$$\lim_n \left(\int_0^1 \|x+x_n(t)\|^2 dt\right)^{1/2} = 1, \quad \int_0^1 x_n(t)\,dt = 0 .$$

Положим

$$\varphi_n(t) = \|x + x_n(t)\| - 1, \quad \psi_n(t) = x^*(x_n(t)) .$$

Так как

$$\int_0^1 \varphi_n(t)\,dt \geq \left\| \int_0^1 (x + x_n(t))\,dt \right\| - 1 = 0 ,$$

то

$$\int_0^1 \|x + x_n(t)\|^2 dt \geq \int_0^1 \varphi_n^2(t)\,dt + 1 .$$

Значит

(1) $$\lim_n \int_0^1 \varphi_n^2(t)\,dt = 0 .$$

Учитывая, что

$$\int_0^1 \|x+x_n(t)\|^2 dt \geq \int_0^1 (1+\psi_n(t))^2 dt = 1 + \int_0^1 \psi_n^2(t)\,dt$$

получим

(2) $$\lim_n \int_0^1 \psi_n^2(t)\,dt = 0 .$$

Так как, согласно теореме Рисса из каждой последовательности функции сходящейся по мере можно выбрать подпоследовательность сходящейся почти всюду, то в силу (1) и (2), неуменьшая общности, можно считать, что

(3) $$\lim_n \varphi_n(t) = 0 , \quad \lim_n \psi_n(t) = 0 \quad \text{п.в.}$$

Пусть $t \in [0,1]$ и имеет место (3). Покажем, что для любого $y^* \in X^*$

(4) $$\lim_n y^*(x_n(t)) = 0 .$$

Положим $z^* = y^* - y^*(x)\,x^*$. Тогда $z^*(x) = 0$. Так как норма дифференцируема по Гато в x^*, то (см. напр. [1], стр. 22)

(5) $$\lim_{\tau \to 0} \frac{\|x^* \pm \tau z^*\| - 1}{\tau} = 0 .$$

Но

$$1 + \varphi_n(t) = \frac{\|x + x_n(t)\|\,\|x^* \pm \tau z^*\|}{\|x^* \pm \tau z^*\|} \geq \frac{1 + \psi_n(t) \pm \tau z^*(x_n(t))}{\|x^* \pm \tau z^*\|} .$$

Отсюда при $\tau > 0$ получим

$$\pm z^*(x_n(t)) \leq (\|x^* \pm \tau z^*\| - 1 - \psi_n(t) + \|x^* \pm \tau z^*\|\,\varphi_n(t))/\tau .$$

Совершая граничный переход по n получим

$$\overline{\lim_n} \, | z^*(x_n(t)) | \le \max_{\alpha=\pm 1} (\| x^* + \alpha \tau z^* \| - 1) / \tau \ .$$

В силу (5) отсюда следует, что

$$\lim_n z^*(x_n(t)) = 0 \ .$$

Значит (4) имеет место.

Из (3) следует, что

$$\lim_n \| x + x_n(t) \| = 1 \quad \text{п.в.} \tag{6}$$

Так как норма в X обладает H – свойством, то из (4) и (6) получим

$$\lim_n \| x_n(t) \| = 0 \quad \text{п.в.} \tag{7}$$

Пусть

$$D_n = \{ t : \| x + x_n(t) \| \le 2 \} \quad \text{и} \quad C_n = [0,1] \setminus D_n \ .$$

Нетрудно видеть, что (см. также [6])

$$\lim_n \int_{C_n} \| x_n(t) \|^2 dt = 0 \ , \ \lim_n \lambda (D_n) = 0 \ , \tag{8}$$

где λ лебеговская мера на [0,1] .

Положим $y_n = \chi_{D_n} x_n$. Тогда из (7) и теоремы Лебега о граничном переходе под знаком интеграла получим $\lim_n \int_0^1 \| y_n(t) \|^2 dt = 0$.

Отсюда и (8) следует, что

$$\lim_n \int_0^1 \| x_n(t) \|^2 dt = 0$$

Этим и завершается доказательство предложения 3.1.

4. Пример. Пусть $\{ e_i \}^\infty$, естественный базис пространства c_0, состоящее из всех сходящихся к нулю последовательностей. В c_0 введем эквивалентную норму формулой

$$\| \sum_{i=1}^\infty a_i e_i \| = \sum_{i=1}^\infty 2^{-i+1} \max_{k \ge i} | a_k | + (\sum_{i=1}^\infty 2^{-i+1} a_i^2)^{1/2} \tag{9}$$

Через X обозначим пространство c_0 с нормой (9). Пусть $x = \frac{1}{2} e_1$, $x_n = \frac{2}{5} e_1 + \frac{1}{5} e_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$. Тогда $\| x \| = 1$, $\lim_n \| x_n \| = 1$, $\lim_n \| x + x_n \| = 2$, но $\| x - x_n \| \ge 3/10$. Значит норма в X не является LUR .

Из одного результата Кадеца [2] следует, что норма в X обладает H –свойством.

Так как $\{ e_i \}^\infty$ монотонный натягивающий базис в X , то согласно одного результата Джеймса (см. напр. [4] стр. 8) второе сопряженное к X пространство X^{**} состоит из всех ограниченных последовательностей $\{ a_i \}^\infty$, с нормой

$$\|\{a_i\}\| = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i+1} \max_{k \geq i} |a_k| + \left(\sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i+1} a_i^2\right)^{1/2} .$$

Отсюда легко видеть, что норма в X^{**} является R . Но тогда (см.напр. [1] стр.23) норма в X^* является S .

ЛИТЕРАТУРА

1. J.Diestel, Geometry of Banach spaces. Selected topics, Lecture Notes in Math., New York, Springer, 1975
2. М.И.Кадец, О пространствах изоморфных локально равномерно выпуклым, Известия Вузов, 6 (1959), 51-57.
3. М.И.Кадец, О связи между некоторыми свойствами выпуклости единичного шара пространства Банаха, Функциональный анализ и его прилож., 16 № 3 (1982), 58-60.
4. J.Lindenstrauss, L.Tzafriri, Classical Banach spaces I, Sequence spaces, New York, Springer, 1977.
5. M.Smith, Some examples concerning rotundity in Banach Spaces, Math. Ann. 233 (1978), 155-161.
6. S.Troyansky, On a property of the norm which is close to locally uniformly rotundity, Math. Ann. (to appear)

Софийский университет им. К. Охридского
Факультет математики и механики
бул. А. Иванов № 5, 1126 София, Болгария