КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ'84
София, 1984, с. 91–96

CONSTRUCTIVE THEORY OF FUNCTIONS'84
Sofia, 1984, p. 91-96

ОБ ВЕСОВОЙ АППРОКСИМАЦИИ МНОГОЧЛЕНАМИ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

В.М.ФЕДОРОВ

I. Пусть $\mathcal{E}^m$ - евклидово пространство конечной размерности m, $\langle x,y\rangle$ и $|x|=\sqrt{\langle x,y\rangle}$ - обозначают соответственно скалярное произведение и норму в $\mathcal{E}^m$, μ - мера Лебега в $\mathcal{E}^m$, $S_d=\{x\in\mathcal{E}^m,\ |x|<d\}$ - шар радиуса d с центром в нуле. Для положительных величин A и B будем писать $A\ll B$, если существует положительная постоянная $c>0$, удовлетворяющая неравенству $A\leq cB$ и зависящая только от тех параметров, которые априори фиксированы. Обозначим через $L^p_\Phi(\Omega)$ множество функций $f(x)$, суммируемых в p-й степени с весом $\Phi(x)$ на $\Omega\subset\mathcal{E}^m$ и

$$\|f\|_{L^p_\Phi(\Omega)}=\begin{cases}\left(\int_\Omega |f\Phi|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}, & 1\leq p<\infty,\\ \sup\operatorname{vrai}_\Omega |f\Phi|, & p=\infty.\end{cases}$$

Если $\Phi(x)=1$, то $L^p_\Phi(\Omega)=L^p(\Omega)$. Для простоты изложения мы рассматриваем только характерные весовые функции вида $\Phi(x)=\exp\{-|x|^\gamma\}$. Пусть

$$E_N(f)_{L^p_\Phi(\Omega)}=\inf\left\{\|f-P_N\|_{L^p_\Phi(\Omega)},\ \deg P_N<N\right\}$$

- наилучшее приближение функции $f(x)$ алгебраическими многочленами $P_N(x)$ степени не выше $N-1$ в метрике пространства $L^p_\Phi(\Omega)$, $W^r_p(\Omega)$ - класс функций, у которых все обобщенные производные $D^r_e f(x)$ порядка r по направлениям $e\in\mathcal{E}^m$ локально суммируемы в степени p и $D^r_e f\in L^p(\Omega)$ ([I], с.I54).

В работах [2] - [4] были доказаны прямые и обратные теоремы теории приближений алгебраическими многочленами, однако эти теоремы не замыкали друг друга. В дальнейшем они были несколько обобщены ([4] - [5]), а также при $m=1$ получены ([7] -[10]) необходимые и достаточные условия для того, чтобы

$$E_N(f)_{L^p_\Phi(\mathcal{E}^m)} \ll \frac{1}{N^\alpha}, \quad \alpha>0. \tag{I}$$

Тем не менее, оставался открытым ответ на следующий вопрос: какова гладкость функций, удовлетворяющих условию (I)? Ответ на этот вопрос вытекает из следующего утверждения.

Теорема. Пусть $0<\alpha<k$, $1\leq p\leq\infty$, $\gamma\geqslant 2$. Для того чтобы

$$E_N(f)_{L^p_\Phi(\mathcal{E}^m)} \ll N^{(\alpha+\tau)(1/\gamma-1)},$$

необходимо и достаточно, чтобы на каждом шаре S_d функция $f\in W^\tau_p(S_d)$ и производные $D^\tau_e f(x)$ удовлетворяли соотношению

$$\sup_{|e|=1}\|\Delta^k_{he}(D^\tau_e f)\|_{L^p_\Phi(S_d)} \ll |h|^\alpha,$$

где $e\in\mathcal{E}^m$, $d=|h|^{\frac{1}{1-\gamma}}$ и

$$\Delta^k_{he}(F,x)=\sum_{v=0}^k(-1)^{k-v}\binom{k}{v}F(x+vhe).$$

2. В этом разделе сформулированные ниже утверждения приводятся без доказательств.

а) Существует такая постоянная $c>0$, зависящая только от γ, что для каждого алгебраического многочлена $P_N(x)$ степени не выше $N-1$ имеет место неравенство

$$\|P_N\|_{L^p_\Phi(\mathcal{E}^m)} \ll \|P_N\|_{L^p_\Phi(S_d)},$$

где $d=(cN)^{1/\gamma}$. Это неравенство вытекает из результатов работ [8], [11].

б) Пусть $\mathcal{L}(e,y)$ обозначает прямую, проходящую через $y\in\mathcal{L}^\perp_e=\{x\in\mathcal{E}^m, \langle x,e\rangle=0\}$ и имеющую направляющий вектор e. Если функция $f(x)$ локально суммируема в $\mathcal{E}^m$, то при почти всех $y\in\mathcal{L}^\perp_e$ она локально суммируема на прямой

$\mathscr{L}(e,y)$ и поэтому имеют смысл средние Валле-Пуссена $V_n^e(f)$ Фурье функции $f(x)$ относительно ортонормированной системы алгебраических многочленов одной переменной с весом $\Phi(x)$ на отрезке $I_{cN}(e,y)=\{x\in\mathscr{L}(e,y): |x-y|\leq (cN)^{1/\gamma}\}$ прямой $\mathscr{L}(e,y)$. В предположении, что $f\in L^p_\Phi(\Omega^e_{cN})$, найдется такая постоянная $c_1>0$, не зависящая от e, f и N, для которой при $N\ll n\leq [c_1N]$ имеет место неравенство

$$\|V_n^e(f)\|_{L^p_\Phi(\Omega^e_{cN})}\ll \|f\|_{L^p_\Phi(\Omega^e_{cN})},$$

где $\Omega^e_{cN}=I_{cN}(e,y)\times\Omega$, $\Omega\subset\mathscr{L}_e^{\perp}$.

в) Если обобщенная производная $D_e^r f(x)$ порядка r по направлению e локально суммируема в степени p и $D_e^r f\in L^p_\Phi(\Omega)$, то найдется такая постоянная $c_1>0$ не зависящая от e, f и N, для которой при $N\ll n\leq [c_1N]$ имеет место неравенство

$$\|f-V_n^e(f)\|_{L^p_\Phi(\Omega^e_{cN})}\ll N^{r(1/\gamma-1)}\|D_e^r f\|_{L^p_\Phi(\Omega^e_{cN})}.$$

3. Далее приводится схема доказательства достаточности утверждения теоремы. Пусть $\delta=N^{1/\gamma-1}$, $d=(cN)^{1/\gamma}$, $|e|=1$, $g_e^r=D_e^r f$ и

$$G_e(x)=\delta^{-k}\int_0^\delta\dots\int_0^\delta\left[g_e^r(x)+\Delta^k_{\frac{e}{k}(u_1+\dots+u_k)}(g_e^r,x)\right]du_1\dots du_k.$$

Функция $G_e(x)$ имеет обобщенную производную порядка k по направлению e, которая локально суммируема в степени p и удовлетворяет следующим неравенствам:

$$\delta^k\|D_e^k G_e\|_{L^p_\Phi(S_{d_0})}\ll \sup_{1\leq s\leq k}\|\Delta^k_{\frac{e\delta s}{k}}(g_e^r)\|_{L^p_\Phi(S_{d_0})}\ll N^{\alpha(1/\gamma-1)},$$

$$\|g_e^r-G_e\|_{L^p_\Phi(S_{d_0})}\ll \sup_{0<t\leq\delta}\|\Delta^k_{te}(g_e^r)\|_{L^p_\Phi(S_{d_0})}\ll N^{\alpha(1/\gamma-1)},$$

где $d_0=(c_0N)^{1/\gamma}$ и постоянная $c_0>0$ выбрана так, что $S_{d_0}\supset I_{cN}(e,y)\times S^{\perp}_d(e)$, $S^{\perp}_d=\{x\in S_d: \langle x,e\rangle=0\}$. Пусть $\{e_i,\ i=1,\dots,m\}$ – ортонормированный базис в $\mathcal{E}^m$, тогда, используя результаты пунктов б) и в), находим

$$\left\| g^{\tau}_{e_i} - V^{e_i}_{n_1}(g^{\tau}_{e_i}) \right\| L^p_{\Phi}(\Omega^{e_i}_{cN}) \ll \left\| g^{\tau}_{e_i} - G_{e_i} \right\| L^p_{\Phi}(\Omega^{e_i}_{cN}) +$$

$$+ \left\| G_{e_i} - V^{e_i}_{n_1}(G_{e_i}) \right\| L^p_{\Phi}(\Omega^{e_i}_{cN}) \ll N^{\alpha(1/\gamma - 1)}$$

при $\Omega^{e_i}_{cN} = I_{cN}(e_i, y) \times S^1_d(e_i)$, $N \ll n_1 \leq [c_1 N]$ и некоторой постоянной $c_1 > 0$, не зависящей от e_i, f и N. Следовательно, применяя ещё раз результаты пунктов б) и в), получаем

$$E_n(f) L^p_{\Phi}(S_d) \ll \sup_{1 \leq i \leq m} \left\| f - V^{e_i}_n(f) \right\| L^p_{\Phi}(\Omega^{e_i}_{cN}) \ll$$

$$\ll N^{\tau(1/\gamma - 1)} \sup_{1 \leq i \leq m} \left\| g^{\tau}_{e_i} - V^{e_i}_{n_1}(g^{\tau}_{e_i}) \right\| L^p_{\Phi}(\Omega^{e_i}_{cN}) \ll N^{(\tau+\alpha)(1/\gamma - 1)}$$

при $N \ll n \leq [c_2 N]$ и некоторой постоянной $c_2 > 0$, не зависящей от f и N. Выберем натуральное число q так, что $2^q < N \leq 2^{q+1}$ и алгебраические многочлены $P_N(x)$, удовлетворяющие условию

$$E_N(f) L^p_{\Phi}(S_d) = \| f - P_N \| L^p_{\Phi}(S_d).$$

Положим $Q_1 = P_1$, $Q_{2^\nu} = P_{2^\nu} - P_{2^{\nu-1}}$, $\nu \geq 1$. Применяя утверждение а) и доказанные выше неравенства, заключаем

$$E_N(f) L^p_{\Phi}(\mathcal{E}^m) \leq \| f - P_{2^q} \| L^p_{\Phi}(\mathcal{E}^m) \ll$$

$$\ll \sum_{\nu = q+1}^{\infty} \| Q_{2^\nu} \| L^p_{\Phi}(S_{d_\nu}) \ll N^{(\tau+\alpha)(1/\gamma - 1)},$$

где $d_\nu = (c\, 2^{\nu-1})^{1/\gamma}$. Таким образом, достаточность утверждения теоремы доказана.

Необходимость. Пусть $P_N(x)$ – алгебраические многочлены наилучшего приближения в метрике пространства $L^p_{\Phi}(\mathcal{E}^m)$ степени не выше $N-1$. Положим $Q_1 = P_1$, $Q_{2^\nu} = P_{2^\nu} - P_{2^{\nu-1}}$, $\nu \geq 1$. При $\tau = 0$ выберем натуральное число n так, что $2^{n(1/\gamma - 1)} < |h| \leq 2^{(n-1)(1/\gamma - 1)}$. Тогда имеем

$$\|\Delta^k_{he}(f)\|_{L^p_\Phi(S_d)} \ll \|\Delta^k_{he}(f-P_{2^n})\|_{L^p_\Phi(S_d)}+$$

$$+\sum_{\nu=0}^{n}\|\Delta^k_{he}(Q_{2^\nu})\|_{L^p_\Phi(S_d)}.$$

Применяя неравенства для производной ([10]) многочлена

$$\text{(2)}\qquad \|D^k_e Q_{2^\nu}\|_{L^p_\Phi(\mathcal{E}^m)} \ll 2^{\nu\tau(1-1/\gamma)}\|Q_{2^\nu}\|_{L^p_\Phi(\mathcal{E}^m)}$$

и утверждение а), получаем

$$\|\Delta^k_{he}(Q_{2^\nu})\|_{L^p_\Phi(S_d)} \ll |h|^k 2^{\nu(k-\alpha)(1-1/\gamma)}.$$

Из этих неравенств легко вытекает необходимость утверждения теоремы при $\tau=0$. Пусть теперь $\tau>0$ и натуральное число n выбрано так, что $2^n<N\leq 2^{n+1}$. Тогда применяя неравенство (2) и утверждение а), находим

$$\Big\|\sum_{\nu=n+1}^{\infty} D^s_e Q_{2^\nu}\Big\|_{L^p_\Phi(\mathcal{E}^m)} \ll N^{(\tau-s+\alpha)(1/\gamma-1)}$$

при $s=0,1,\ldots,\tau$. Следовательно ряд $\sum_{\nu=0}^{\infty} D^s_e Q_{2^\nu}$ сходится в метрике пространства $L_\Phi(\mathcal{E}^m)$. Хорошо известные рассуждения показывают ([I] ,с.I69), что функция $f(x)$ на каждом шаре S_d почти всюду совпадает с функцией из класса $W^\tau_p(S_d)$, у которой обобщенная производная $D^\tau_e f(x)$ удовлетворяет соотношению

$$\|D^\tau_e f - D^\tau_e P_{2^n}\|_{L^p_\Phi(\mathcal{E}^m)} \ll N^{\alpha(1/\gamma-1)}.$$

Применяя к производной $D^\tau_e f(x)$ уже доказанное утверждение в случае $\tau=0$, получаем

$$\|\Delta^k_{he}(D^\tau_e f)\|_{L^p_\Phi(S_d)} \ll |h|^\alpha.$$

Теорема доказана.

Литература

I. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М. 1977.

2. Джрбашян М.М. О взвешенно-наилучшем приближении полиномами на вещественной оси.- ДАН СССР, 1952, 84, 1123-1126.

3. Джрбашян М.М. Некоторые вопросы теории взвешенно-полиномиальных приближений в комплексной области. – Мат.сб.,1955,36 (78), 353-440.

4. Джрбашян М.М., Тавадян А.Б. О взвешенно-равномерном приближении полиномами функций многих переменных. – Мат.сб., 1957, 43 (85), 227-256.

5. Джафаров А.С. О взвешенно- наилучшем приближении функций многих переменных при помощи многочленов. – Труды ИФМ Аз.ССР, 1959, 117-134.

6. Джафаров А.С. Наилучшее взвешенное приближение функций посредством многочленов и безусловная сходимость на вещественной оси рядов Фурье по ортонормированной системе многочленов. – Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций.- – М. 1961.

7. Фройд Г. Об аппроксимации с весом алгебраическими многочленами на действительной оси. – ДАН СССР, 1970, 191, 293-294.

8. Фройд. Г. Об одном неравенстве марковского типа. – ДАН СССР, 1971, 197, 790-793.

9. Freud G. On polynomial approximation with respect to general weights.- Lecture Notes in Mathematics, Springer, 1974, 399, 149-179.

10. Freud G. On Markov-Bernstein-type inequalities and their applications.- Journal Approximation Theory, 1977, 19, 22-37.

11. Неваи Г.П. Многочлены, ортогональные на вещественной оси с весом $|x|^{\alpha} e^{-|x|^{\beta}}$. – Acta Mathematic Acad. Sci. Hungar, 1973, 24, 335-342.

Московский
государственный университет