КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ'84
София, 1984, с. 97—101

CONSTRUCTIVE THEORY OF FUNCTIONS'84
Sofia, 1984, p. 97-101

ПРОСТРАНСТВА ПОРОЖДЕННЫЕ УСРЕДНЕННЫМ МОДУЛЕМ ГЛАДКОСТИ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Владимир Х. Христов

1. Определения. Пусть $\mathbb{R}^m$ – m-мерное эвклидово пространство, наделенное нормой $|x|=max\{|x_i|: i=1,2,\dots,m\}$, где $x=(x_1,x_2,\dots,x_m)\in\mathbb{R}^m$ и пусть $\mathbb{T}^m=\{x: x\in\mathbb{R}^m, 0\le x_i<2\pi\}$. Через $M(\mathbb{T}^m)$ будем обозначать совкупность измеримых, ограниченных и 2π-периодических по каждой переменной функций, определенных на $\mathbb{R}^m$. Если $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m)$ мультииндекс, $0\le\alpha_i$ – целые $(1\le i\le m)$, то будем использовать обозначения $|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_m$, $D^\alpha=\partial^{|\alpha|}/\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\dots\partial x_m^{\alpha_m}$.

Для функции $f\in M(\mathbb{T}^m)$ усредненный модуль гладкости k-того порядка в норме L_p $(1\le p\le\infty$ определяется следующим образом [1,2]

$$\tau_k(f;\delta)_p=\|\omega_k(f;\cdot,\delta)\|_{L_p(\mathbb{T}^m)},$$

где
$$\omega_k(f;x,\delta)=sup\{|\Delta_h^k f(t)|: t, t+kh\in\Omega_{k\delta}(x)\},$$

$\Omega_{k\delta}(x)=\{y: y\in\mathbb{R}^m, |x-y|\le k\delta/2\}$. Об истории, свойств и некоторых применений этого модуля см. [1–3].

По аналогии с тем, как через обычный модуль $\omega_k(f;\delta)_p$ гладкости k-того порядка в норме L_p $(\omega_k(f;\delta)_p=sup\{\|\Delta_h^k f(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{T}^m}: |h|\le\delta)$ определяются пространства Бесова B_{pq}^θ (см. [4], стр. 159), через модуль $\tau_k(f;\delta)_p$ можно определить следующие полунормы [2,5] для $0<\theta<k, 1\le p, q\le\infty$ и $f\in M(\mathbb{T}^m)$:

$$\|f\|_{a_{pq}^\theta}=(\int_0^\infty t^{-\theta q-1}\tau_k(f;t)_p^q dt)^{1/q} \quad (1\le q<\infty),$$

$$\|f\|_{a_{p\infty}^\theta}=sup\{t^{-\theta}\tau_k(f;t)_p: 0<t<\infty\}$$

и следующие классы функций:

$$A_{pq}^\theta(\mathbb{T}^m)=\{f: f\in M(\mathbb{T}^m), \|f\|_{A_{pq}^\theta}=\|f\|_{Lp(\mathbb{T}^m)}+\|f\|_{a_{pq}^\theta}<\infty\}.$$

Так как модули $\tau_k(f;\delta)_p$ находят все большее применения в различных вопросах теории аппроксимаций функций и в численных методах, то естественно исследовать некоторые общие свойства классов A_{pq}^{θ} . Это и есть цель настоящей статьи.

2. Односторонний K-функционал. Хорошо известно, что пространства Бесова $B_{pq}^{\theta}(\mathbb{T}^m)$ можно определить и через следующий K-функционал, [6], стр. 55:

$$K(t,f;L_p,W_p^k)=K(t,f;A_0,A_1)=\inf\{\|f_0\|_{A_0}+t\|f_1\|_{A_1}: f=f_0+f_1,\ f_i\in A_i\},$$

где пространство $A_1=W_p^k(\mathbb{T}^m)$ и (полу) норма в нем определяются обычным образом (см. [4], стр. 154). Тогда

$$\begin{aligned}(1)\qquad & B_{pq}^{\theta}(\mathbb{T}^m)=(L_p,W_p^k)_{\theta/k,q}\\ &=\{f: f\in L_p(\mathbb{T}^m),\ \|f\|_{B_{pq}^{\theta}}=\Big(\int_0^\infty t^{-\theta q/k-1}K(t,f)^q dt\Big)^{1/q}<\infty\}\ (1\le q<\infty)\\ & B_{p\infty}^{\theta}(\mathbb{T}^m)=(L_p,W_p^k)_{\theta/k,\infty}=\{f: f\in L_p(\mathbb{T}^m),\ \|f\|_{B_{p\infty}^{\theta}}=\sup\{t^{-\theta/k}K(t,f): 0<t<\infty\}<\infty\}.\end{aligned}$$

Для определения классов A_{pq}^{θ}, через K-функционалы, В.А.Попов [5,7] ввел следующие K-функционалы с ограничениями (односторонние K-функционалы):

$$K_+(t,f;L_p,W_{p,*}^k)=\inf\{\|f_0\|_{L_p}+\sum_{1\le|\alpha|\le k} t^{|\alpha|}\|D^{\alpha}f_1\|_{L_p}: f=f_0+f_1,\ f_0\ge 0\},$$

$$K_-(t,f;L_p,W_{p,*}^k)=\inf\{\|f_0\|_{L_p}+\sum_{1\le|\alpha|\le k} t^{|\alpha|}\|D^{\alpha}f_1\|_{L_p}: f=f_0+f_1,\ f_0\le 0\},$$

$$\widetilde{K}(t,f;L_p,W_{p,*}^k)=\max\{K_+(t,f),K_-(t,f)\},$$

где $W_{p,*}^k$ – пространство Соболева со следующей эквивалентной полунормой $\|f\|_{W_{p,*}^k}=\sum_{1\le|\alpha|\le k}\|D^{\alpha}f\|_{L_p(\mathbb{T}^m)}$.

Через функционал $K_+(t,f)$ определим пространство $(L_p,W_{p,*}^k)_{\theta,q,K_+}$ $0<\theta<k,\ 1\le p,q\le\infty$, как совокупность всех функций $f\in L_p(\mathbb{T}^m)$, таких что $\inf\{f(x): x\in\mathbb{R}^m\}>-\infty$ и для которых конечна следующая норма $\|f\|_{(L_p,W_{p,*}^k)_{\theta,q,K_+}}=\|f\|_{L_p(\mathbb{T}^m)}+\Big(\int_0^\infty t^{-\theta q-1}K_+(t,f)^q dt\Big)^{1/q}$. Аналитично определяются и пространства $(L_p,W_{p,*}^k)_{\theta,q,K_-}$ и $(L_p,W_{p,*}^k)_{\theta,q,\widetilde{K}}$. Отметим, что если обозначим через $L_p^+(\mathbb{T}^m)=\{f: f\in L_p(\mathbb{T}^m),\ f\ge 0\}$, то

$$\begin{aligned}(2)\qquad & K_+(t,f:L_p,W_{p,*}^k)=K(t,f:L_p^+,W_{p,*}^k),\\ & (L_p,W_{p,*}^k)_{\theta,q,K_+}=(L_p^+,W_{p,*}^k)_{\theta,q}.\end{aligned}$$

Равенства (2) остаются в силе, если везде заменить + на – , т.е. и для $K_-(t,f)$ и $L_p^-(\mathbb{T}^m)$.

Из доказанных Поповым в [5,7] неравенств

$$C_1\tau_k(f:t)_p\le\widetilde{K}(t,f:L_p,W_{p,*}^k)\le C_2\tau_k(f;t)_p$$

получаем (ср. с (1))

$$(L_p,W_{p,*}^k)_{\theta,q,\widetilde{K}}=A_{pq}^{\theta}(\mathbb{T}^m).$$

Для классов $A^{\theta}_{pq}(\mathbb{T}^m)$ легко получить, что относительно введенных выше норм, они являются банаховыми пространствами. Вопрос об эквивалентных норм в A^{θ}_{pq} иследовался в [2,5]. Отметим, что используя технику K-метода для получения интерполяционных пространств [6], стр. 57, легко получить, что пространства A^{θ}_{pq} обладают интерполяционным свойством относительно всех линейных положительных операторов. Наверно поэтому, через модуль $\tau_k(f,\delta)_p$ можно оценить L_p расстояние между заданной функции $f \in M(\mathbb{T}^m)$ и произвольным линейнным положительным оператором (см. [8–10]).

Так как L_p^+ и L_p^- являются нормированные абелевы полугруппы относительно операции сложения, то пространства $(L_p, W^k_{p,*})_{\theta,q,K_+} = (L_p^+, W^k_{p,*})_{\theta,q}$ входят в общей схеме построения квазинормированных пространств вещественным методом интерполяции на квазинормированных конусах, развитой Загером [11,12]. Следовательно, для них справедливы аналог формулы Хольмстедта и формула реитерации (см. [6], стр.71, 106). Аналогично и для пространств $(L_p, W^k_{p,*})_{\theta,q,K_-}$. Точнее, справедлива

Теорема 1. Если $1 \le p, q, q_0, q_1 \le \infty$ и $0 < \theta_0 < \theta_1 < k$, то

(3) $$((L_p, W^k_{p,*})_{\theta_0,q_0,K_+}, (L_p, W^k_{p,*})_{\theta_1,q_1,K_+})_{\eta,q} = (L_p, W^k_{p,*})_{\theta,q,K_+},$$

где $\theta = (1-\eta)\theta_0 + \eta\theta_1$. Равенство (3) остается в силе, если везде заменить $+$ на $-$.

3. Теоремы вложения для пространств A^{θ}_{pq}. Используя, что $\omega_k(f;\delta)_p \le \tau_k(f;\delta)_p$ и технику метода вещественной интерполяции пространств получается

Теорема 2. В обозначениях теоремы 1 имеем

$$((L_p, W^k_{p,*})_{\theta_0,q_0,\widetilde{K}}, (L_p, W^k_{p,*})_{\theta_1,q_1,\widetilde{K}})_{\eta,q} = (A^{\theta_0}_{pq_0}, A^{\theta_1}_{pq_1})_{\eta,q} \subset A^{\theta}_{pq} \subset B^{\theta}_{pq}$$

где $\theta = (1-\eta)\theta_0 + \eta\theta_1$.

Используя при $m=1$ результат Иванова из [13], а при $m>1$ доказанное в [14] неравенство

$$\tau_{k+m}(f;\delta)_p \le C_{m,p}\,\delta^m \sum_{|\alpha|=m} \omega_k(D^{\alpha}f;\delta)_p$$

получаем

Теорема 3. Для любых $1 \le p, q \le \infty$

$$A^{\theta}_{pq}(\mathbb{T}^1) = B^{\theta}_{pq}(\mathbb{T}^1) \quad \text{при} \quad \theta > 1/p,$$

$$A^{\theta}_{pq}(\mathbb{T}^m) = B^{\theta}_{pq}(\mathbb{T}^m) \quad \text{при} \quad \theta > m.$$

Из доказанного в [14] неравенства

$$\tau_m(f;\delta)_p \le C_m \delta^m \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha f\|_{L_p}(\mathbb{T}^m) = C_m \delta^m \|f\|_{W_p^m(\mathbb{T}^m)}$$

и определения пространств $A_{pq}^\theta(\mathbb{T}^m)$ получаем

Теорема 4. Для любых $\theta > m$ и $1 \le p, q \le \infty$

$$W_p^m(\mathbb{T}^m) \subset A_{pq}^\theta(\mathbb{T}^m).$$

Используя неравенства для полиномов в различных L_p норм [4], стр. 122 и наличие эквивалентной полиномиальной нормы в пространстве $A_{pq}^\theta(\mathbb{T}^m)$, [2], как и для пространств Бесова [4] получаем

Теорема 5. [2]. Если $\theta > 0$, $1 \le p, q \le \infty$, $p < p' \le \infty$ и $\theta' = \theta - m\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p'}\right) > 0$, то

$$A_{pq}^\theta(\mathbb{T}^m) \subset A_{p'q}^{\theta'}(\mathbb{T}^m),$$

т.е. если $f \in A_{pq}^\theta$, то $f \in A_{p'q}^{\theta'}$ и $\|f\|_{A_{p'q}^{\theta'}} \le C\|f\|_{A_{pq}^\theta}$.

Используя неравенства между норм при различных q, получаем следующую цепочку включений

$$A_{p1}^\theta \subset A_{pq}^\theta \subset A_{pq'}^\theta \subset A_{p\infty}^\theta,$$

где $q \le q'$.

ЛИТЕРАТУРА

1. V.A.Popov. Onesided approximation of periodic functions of several variables. C.R.Acad.Bulg.Sci. 35, 1982, 1639 - 1642.
2. В.А.Попов, В.Х.Христов. Усредненные модули гладкости для функций многих переменных и пространства функций, порожденные ими. Труды МИ АН СССР. 164, 1983, 136–141.
3. Бл.Сендов, В.А.Попов. Усреднени модули на гладкост. Издателство БАН, София, 1983.
4. С.М.Никольский. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. "Наука", Москва, 1977.
5. V.A.Popov. Function spaces, generated by averaged moduli of smoothness, Pliska, 5, 1983, 132-143.
6. Й.Берг, Й.Лефстрем. Интерполационные пространства. Введение. "Мир", Москва, 1980.
7. В.А.Попов, Односторонный К–функционал – многомерный случай. Труды конференции по теории приближений, Киев'83 (в печати).
8. A.S.Andreev, V.A.Popov. Approximation of functions by means of linear summation operation in L_p. Colloquia Mathematica Socictasis Janos Boliai, 35, Functions, Series, Operators, Budapest, 1980, 1-24
9. V.A.Popov. On the quantitative Korovkin theorems in L_p. C.R.Acad. Bulg.Sci., 35, 1982, 897-900.

10. В.Х.Христов, О количественной теореме Коровкина в L_p для периодических функций, Доклады БАН, 36, 1983, 1035 - 1038.

11. Y.Sagher. Interpolation in r-Banach spaces. Studia Math.41, 1972 45-70.

12. Y.Sagher, An application of interpolation to Fourier series. Studia Math. 41,1972,169-181.

13. K.G.Ivanov. On the rates of convergence of two moduli of functions. Pliska, 5,1983,97-107.

14. В.Х.Христов, Связь между обычным и усредненным модулями функций многих переменных, Доклады БАН, (в печати).

Институт математики с ВЦ
Болгарской Академии Наук
1090 София п.я.373