

Инварианти на резолюции на Щайнерови 2-дизайни

Svetlana Topalova is partially supported by the Bulgarian National Science Fund under Contract No DH 02/2, 13.12.2016.

Stela Zhelezova is partially supported by the Bulgarian National Science Fund under Contract No KP-06-N32/2-2019.

Svetlana Topalova, Stela Zhelezova
Institute of Mathematics and Informatics, BAS, Bulgaria

- ⊙ Изоморфизъм и инварианти
- ⊙ Дефиниции и означения
- ⊙ История - инварианти на резолюции
- ⊙ Инварианти на резолюции на 2 - $(v,k,1)$ дизайни
- ⊙ Заключение

Изоморфизъм и инварианти

- ◉ Bouyukliev, I.: About the code equivalence, 2007,
<http://www.moi.math.bas.bg/moiuser/~data/Software/QextNewEdition.html>
- ◉ Betten, A.: Orbiter - A program to classify discrete objects, 2016-2018,
<https://github.com/abetten/orbiter>
- ◉ Jungnickel, D., Tonchev, V.D.: New invariants for incidence structures, 2013
- ◉ Junttila, T. and Kaski, P.: Engineering an efficient canonical labeling tool for large and sparse graphs, 2007
- ◉ Kaski, P., Östergård, P.: Classification algorithms for codes and designs, 2006
- ◉ Magma. The Computational Algebra Group, within the School of Mathematics and Statistics of the University of Sydney, 2004
<https://www.magmasoft.com/en/company/about-magma/>
- ◉ McKay, B. D. and Piperno, A.: Practical graph isomorphism, 2014,
<https://users.cecs.anu.edu.au/~bdm/nauty/>

Дефиниции и означения

◎ *2-design*:

- V - крайно множество от v точки
- B - съвкупност от b блока: k -елементни подмножества на V
- $D = (V, B)$ - $2-(v, k, \lambda)$ дизайн, ако всяка двойка точки е в λ блока на B .

◎ *Щайнеров 2-дизайн* - $2-(v, k, 1)$ дизайн

◎ *Изоморфни дизайни* - съществува взаимно-еднозначно съответствие между точките и между блоковете на двата дизайна, което запазва инцидентността.

◎ *Аutomорфизъм* - изоморфизъм на дизайна със себе си.

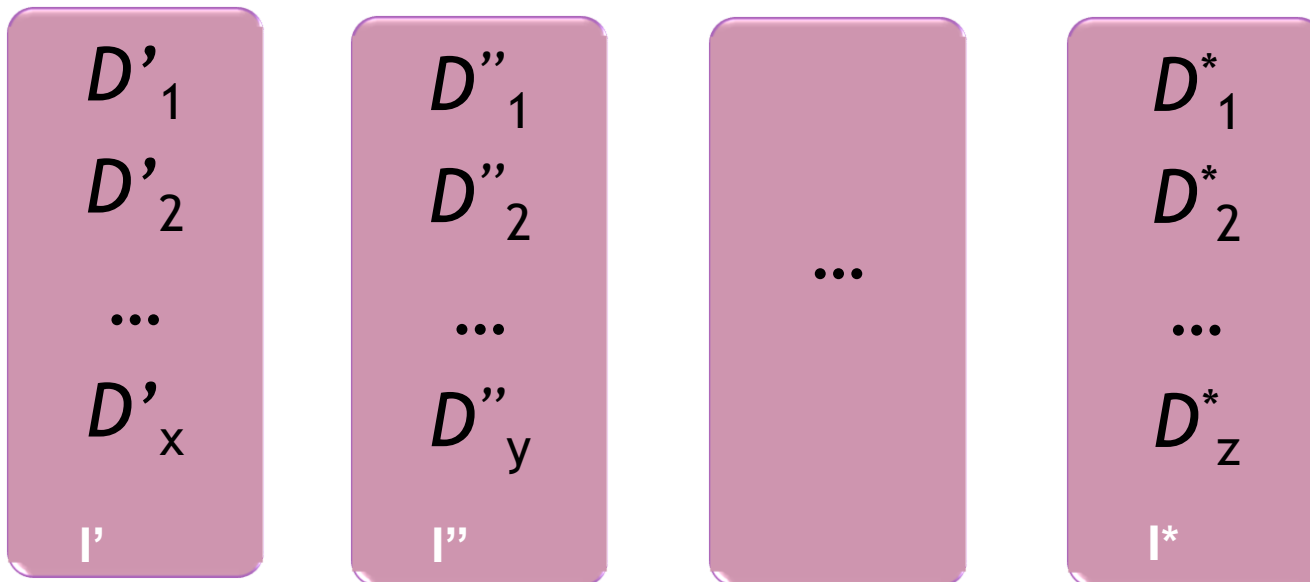
Изоморфизъм и инварианти на дизайните

$$I(D'_1) = I(D'_2) = \dots = I(D'_x) = I'$$

инварианти / # неизоморфни - чувствителност

$I(D_1) = I(D_2) \Leftrightarrow$ изом. D_1 и D_2 – пълна инвар., чувствителност 1

Чувствителна инварианта - чувствителност близка до 1

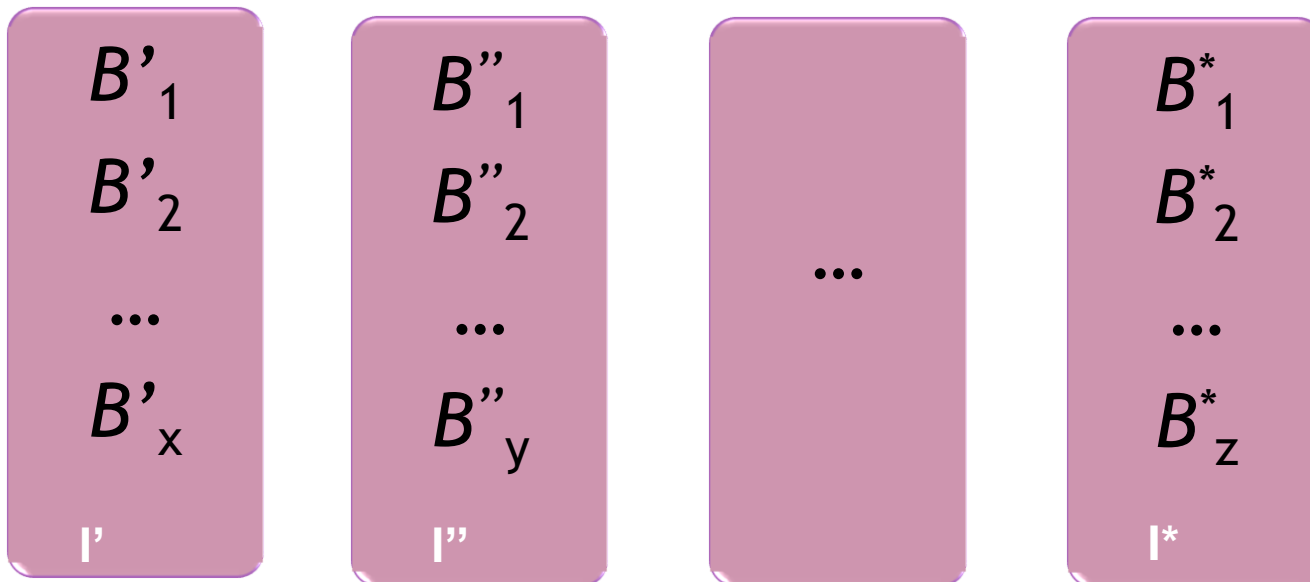


Автоморфизъм и инварианти на точките/блоковете на дизайна

$$I(B'_1) = I(B'_2) = \dots = I(B'_x) = I'$$

Автоморфизъм: $B_1 \rightarrow B_2 \Rightarrow I(B_1) = I(B_2)$

Търсим автоматоморфизъм като изображение на блоковете в блокове със същите инварианти



Инварианти на блоковете на дизайн

- Какви са връзките на блока **с всеки** от останалите блокове (с колко от тях има една обща точка, с колко има 2 общи точки, ... с колко няма общи точки)
- Какви са връзките от даден вид на блока **с всяка двойка** от останалите блокове - Tonchev

Дефиниции и означения

- ◎ **Паралелен клас** - множество от взаимно непресичащи се блокове, като всяка точка се среща точно в един от тях.
- ◎ **Резолуция** - разбиване на блоковете на паралелни класове.
- ◎ **Изоморфни** резолуции - съществува автоморфизъм на дизайна, който изобразява всеки паралелен клас на едната резолуция в паралелен клас на другата.

Инцидентността на *точките* и *правите* на $PG(n, q)$ задава *Щайнеров 2-design*.

$$2-\left(\frac{q^{n+1}-1}{q-1}, \frac{q^2-1}{q-1}, 1\right) \text{ design } D$$

Точки на D \longleftrightarrow Точки на $PG(n, q)$

Блокове на D \longleftrightarrow Приви на $PG(n, q)$

Резолуции на D \longleftrightarrow Паралелизми на $PG(n, q)$

Изоморфизъм и инварианти на резолюции

- ◉ Stinson, D. R., Vanstone, S. A.: *Some non-isomorphic Kirkman triple systems of orders 39 and 51*, 1985
- ◉ Morales, L.B., Velarde, C.: *A complete classification of (12,4,3) RBIBDs*, 2001
- ◉ Kaski, P., Morales, L.B, Östergård P., Rosenblueth, D.A, Velarde, C.: *Classification of resolvable 2-(14,7,12) and 3-(14,7,5) designs*, 2003
- ◉ Morales, L.B., Velarde, C.: *Enumeration of resolvable 2(10,5,16) and 3(10,5,6) designs*, 2005

Връзка между всеки блок и всеки паралелен клас

C1			C2			C3		
bl	points	inv	bl	points	inv	bl	points	inv
B ₁	1,2,3,4,5	1	B ₁₈	1,6,7,8,9	3	B ₃₅	1,10,11,12,13	3
B ₂	6,22,38,54,70	2	B ₁₉	2,22,26,30,34	4	B ₃₆	2,24,28,32,36	4
B ₃	7,26,43,60,77	2	B ₂₀	3,38,43,48,53	4	B ₃₇	3,40,45,46,51	4
B ₄	8,30,48,65,79	2	B ₂₁	4,54,60,65,67	4	B ₃₈	4,57,59,62,68	4
B ₅	9,34,53,67,84	2	B ₂₂	5,70,77,79,84	4	B ₃₉	5,73,74,80,83	4
B ₆	10,28,40,68,80	2	B ₂₃	10,29,41,69,81	5	B ₄₀	6,23,39,55,71	5
B ₇	11,24,45,62,83	2	B ₂₄	11,25,44,63,82	5	B ₄₁	7,27,42,61,76	5
B ₈	12,36,46,59,73	2	B ₂₅	12,37,47,58,72	5	B ₄₂	8,31,49,64,78	5
B ₉	13,32,51,57,74	2	B ₂₆	13,33,50,56,75	5	B ₄₃	9,35,52,66,85	5
B ₁₀	14,33,41,61,85	2	B ₂₇	14,31,39,59,83	5	B ₄₄	14,30,38,58,82	5
B ₁₁	15,37,44,55,78	2	B ₂₈	15,35,42,57,80	5	B ₄₅	15,34,43,56,81	5
B ₁₂	16,25,47,66,76	2	B ₂₉	16,23,49,68,74	5	B ₄₆	16,22,48,69,75	5
B ₁₃	17,29,50,64,71	2	B ₃₀	17,27,52,62,73	5	B ₄₇	17,26,53,63,72	5
B ₁₄	18,35,39,63,75	2	B ₃₁	18,36,40,64,76	5	B ₄₈	18,37,41,65,77	5
B ₁₅	19,31,42,69,72	2	B ₃₂	19,32,45,66,71	5	B ₄₉	19,33,44,67,70	5
B ₁₆	20,27,49,56,82	2	B ₃₃	20,28,46,55,85	5	B ₅₀	20,29,47,54,84	5
B ₁₇	21,23,52,58,81	2	B ₃₄	21,24,51,61,78	5	B ₅₁	21,25,50,60,79	5

2-(v,k,1) дизайн,

B_1, B_2, \dots, B_b - b блока

C_1, C_2, \dots, C_r - r паралелни класа

PG(3,4)

2-(85,5,1),
b=357, r=21

N_j^d - броят на блоковете от паралелния клас на B_j , които са различни от B_j и нямат общи точки с блоковете от клас C_d , които имат общи точки с B_j .

Връзка между блок и паралелен клас

C1		C2	
bl	points	bl	points
B ₁	1,2,3,4,5	B ₁₈	1,6,7,8,9
B ₂	6,22,38,54,70	B ₁₉	2,22,26,30,34
B ₃	7,26,43,60,77	B ₂₀	3,38,43,48,53
B ₄	8,30,48,65,79	B ₂₁	4,54,60,65,67
B ₅	9,34,53,67,84	B ₂₂	5,70,77,79,84
B ₆	10,28,40,68,80	B ₂₃	10,29,41,69,81
B ₇	11,24,45,62,83	B ₂₄	11,25,44,63,82
B ₈	12,36,46,59,73	B ₂₅	12,37,47,58,72
B ₉	13,32,51,57,74	B ₂₆	13,33,50,56,75
B ₁₀	14,33,41,61,85	B ₂₇	14,31,39,59,83
B ₁₁	15,37,44,55,78	B ₂₈	15,35,42,57,80
B ₁₂	16,25,47,66,76	B ₂₉	16,23,49,68,74
B ₁₃	17,29,50,64,71	B ₃₀	17,27,52,62,73
B ₁₄	18,35,39,63,75	B ₃₁	18,36,40,64,76
B ₁₅	19,31,42,69,72	B ₃₂	19,32,45,66,71
B ₁₆	20,27,49,56,82	B ₃₃	20,28,46,55,85
B ₁₇	21,23,52,58,81	B ₃₄	21,24,51,61,78

N_2^2 - броят на блоковете от C_1 (паралелния клас на B_2), които са различни от B_2 и нямат общи точки с блоковете от клас C_2 , които имат общи точки с B_2 .

$$N_2^2 = 12 \rightarrow |\{B_6, B_7, \dots, B_{17}\}|$$

$$PG(3,4) \rightarrow 2-(85,5,1), b=357, r=21$$

Връзка между блок и неговия паралелен клас

C1		
bl	points	inv
B_1	1,2,3,4,5	1
B_2	6,22,38,54,70	2
B_3	7,26,43,60,77	2
B_4	8,30,48,65,79	2
B_5	9,34,53,67,84	2
B_6	10,28,40,68,80	2
B_7	11,24,45,62,83	2
B_8	12,36,46,59,73	2
B_9	13,32,51,57,74	2
B_{10}	14,33,41,61,85	2
B_{11}	15,37,44,55,78	2
B_{12}	16,25,47,66,76	2
B_{13}	17,29,50,64,71	2
B_{14}	18,35,39,63,75	2
B_{15}	19,31,42,69,72	2
B_{16}	20,27,49,56,82	2
B_{17}	21,23,52,58,81	2

PG(3,4) 2-(85,5,1) $b=357$, $r=21$

N_2^1 - броят на блоковете от C_1
 (паралелния клас на B_2), които са
 различни от B_2 и нямат общи точки с B_2 .

$$N_2^1 = 16 \rightarrow |\{B_1, B_3, \dots, B_{17}\}|$$

Инварианти на блоковете

Стойности на N_2^d за всичките r паралелни класа

d	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
N_2^d	16	12	6	12	12	6	6	6	6	12	12	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6

$\Omega_2 = (0,0,0,0,0,0,15,0,0,0,0,0,5,0,0,0,1)$

- $B_j \rightarrow \Omega_j = (b_j^0, b_j^1, \dots, b_j^{v/k-1}),$

b_j^m - броят на паралелните класове C_d , за които $N_j^d = m$

- Лексикографски ред

$\Omega_j' < \Omega_j''$ ако $b_j^k' < b_j^k''$ и $b_j^i' = b_j^i''$ за $i < k$.

Множество от инвариантите на блоковете - β

PG(3,4) 2-(85,5,1) b=357, r=21

#i nv	b ₀	b ₁	b ₂	b ₃	b ₄	b ₅	b ₆	b ₇	b ₈	b ₉	b ₁₀	b ₁₁	b ₁₂	b ₁₃	b ₁₄	b ₁₅	b ₁₆
β_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	20	0	0	0	1
β_2	0	0	0	0	0	0	15	0	0	0	0	0	5	0	0	0	1
β_3	0	0	0	0	19	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
β_4	0	0	8	3	4	4	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
β_5	4	0	2	4	9	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

$\Omega_2 = (0,0,0,0,0,0,15,0,0,0,0,0,5,0,0,0,0,1)$

$\Omega_j, j = 1, 2, \dots, b$

$\beta = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5\}$

$r \ll \frac{(b-1)(b-2)}{2}, \quad O(b^3/r)$

C1			C2		
bl	points	inv	bl	points	inv
B ₁	1,2,3,4,5	1	B ₁₈	1,6,7,8,9	3
B ₂	6,22,38,54,70	2	B ₁₉	2,22,26,30,34	4
B ₃	7,26,43,60,77	2	B ₂₀	3,38,43,48,53	4
B ₄	8,30,48,65,79	2	B ₂₁	4,54,60,65,67	4
B ₅	9,34,53,67,84	2	B ₂₂	5,70,77,79,84	4
B ₆	10,28,40,68,80	2	B ₂₃	10,29,41,69,81	5
B ₇	11,24,45,62,83	2	B ₂₄	11,25,44,63,82	5

Множество от инвариантите на точките - π

точка P_i е в r блока

$$P_i = (\beta_{i1}, \beta_{i2}, \dots, \beta_{ir})$$

PG(3,4) 2-(85,5,1) b=357, r=21

#inv	1	2	3	4	5	6	7	...	17	18	19	20	21
π_1	1	3	3	3	3	3	3	...	3	4	4	4	4
π_2	2	3	3	3	3	4	5	...	5	5	5	5	5

$$\pi = \{\pi_1, \pi_2\}$$

Множество от инвариантите на класовете - γ

C1		
bl	points	inv
B ₁	1,2,3,4,5	1
B ₂	6,22,38,54,70	2
B ₃	7,26,43,60,77	2
B ₄	8,30,48,65,79	2
B ₅	9,34,53,67,84	2
B ₆	10,28,40,68,80	2
B ₇	11,24,45,62,83	2
B ₈	12,36,46,59,73	2
B ₉	13,32,51,57,74	2
B ₁₀	14,33,41,61,85	2
B ₁₁	15,37,44,55,78	2
B ₁₂	16,25,47,66,76	2
B ₁₃	17,29,50,64,71	2
B ₁₄	18,35,39,63,75	2
B ₁₅	19,31,42,69,72	2
B ₁₆	20,27,49,56,82	2
B ₁₇	21,23,52,58,81	2

Паралелният клас има v/k блока

$$\Gamma_i = (\beta_{i1}, \beta_{i2}, \dots, \beta_{i(v/k)})$$

PG(3,4) 2-(85,5,1) b=357, r=21

inv	1	2	3	4	5	6	...	17
γ_1	1	2	2	2	2	2	...	2
γ_2	3	3	3	3	4	5	...	5

$$\gamma = \{\gamma_1, \gamma_2\}$$

ИНВАРИАНТИ НА РЕЗОЛЮЦИИ

Инварианти на резолюции - множества β , π , γ
от инварианти на блоковете, точките и класовете

Пример: паралелизми на $PG(3,4)$

$ G_p $	4	5	6	7	10	12	15	20	24	30	48	60	96	960	All
I	251836	31648	4488	482	72	40	26	52	14	20	12	4	2	3	288699
N	251836	31830	4488	482	76	52	40	52	14	38	12	8	2	4	288934
S	1	0.9943	1	1	0.9474	0.7692	0.65	1	1	0.5263	1	0.5	1	0.75	0.9992

$|G_p|$ - ред на пълната група от автоморфизми;

I - брой на класовете според инвариантите

N - брой на класовете на изоморфизъм

S - чувствителност на инвариантите $S = I/N$

Заклучение

- *Инвариантите*, които разглеждаме:

- са сравнително *прости*,
- пресмятат се *бързо*,
- *не е необходима много памет* за да бъдат съхранени,
- имат много добра чувствителност за случаите, в които сме ги използвали.

Очакваме да са приложими:

- При бъдещи класификации на паралелизми с по-големи параметри.
- При други Щайнерови 2-дизайни.

Благодаря за вниманието!