

Първо контролно
за определяне на национален отбор за участие в БОМ2007
и отбор за участие във Всерусийска олимпиада
ИМИ-БАН, София, 07.04.2007 г.

Задача 1. Нека ABC е триъгълник с $\sphericalangle BAC = 30^\circ$ и радиус на описаната окръжност 1. За произволна точка X от вътрешността или контура му означаваме $m(X) = \min(AX, BX, CX)$. Да се намерят ъглите на триъгълника, ако най-голямата стойност на $m(X)$ е равна на $\sqrt{3}/3$.

Задача 2. Да се намерят всички $a \in \mathbb{R}$, за които съществува неконстантна функция $f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ така, че

$$a + f(x + y - xy) + f(x)f(y) \leq f(x) + f(y) \text{ за произволни } x, y \in (0, 1].$$

Задача 3. Нека I е центърът на вписаната окръжност в неравнобедрен $\triangle ABC$, $A_1 = AI \cap BC$ и $B_1 = BI \cap AC$. Правите през A_1 и B_1 , успоредни съответно на AC и BC , пресичат правата CI в точки A_2 и B_2 . Нека $N = AA_2 \cap BB_2$ и M е средата на AB . Ако $CN \parallel IM$, да се намери отношението $CN : IM$.

Задача 4. Нека G е неориентиран граф и x е връх на G . Преобразованието φ_x на G се състои в:

- изтриване на всички ребра, излизащи от x ;
- добавяне на ребрата xu за върховете u , които не са съседни на x .

Графът H се нарича G -достижим, ако съществува редица от преобразования от горния вид, която трансформира G в H .

Нека n е естествено число, кратно на 4. Да се докаже, че за всеки граф G с $4n$ върха и n ребра съществува G -достижим граф, който съдържа поне $9n^2/4$ триъгълника.