# Метод на редуцирания базис, приложен към модел за растеж на популация

Петър Рашков
Годишна отчетна сесия на секция „ММЧА“
ИМИ-БАН

12.12.2021

Това изследване е подкрепено от Фонд „Научни изследвания“ по Националната научна програма „Петър Берон и НИЕ“ на МОН с договор № КП-06-ДБ-5.

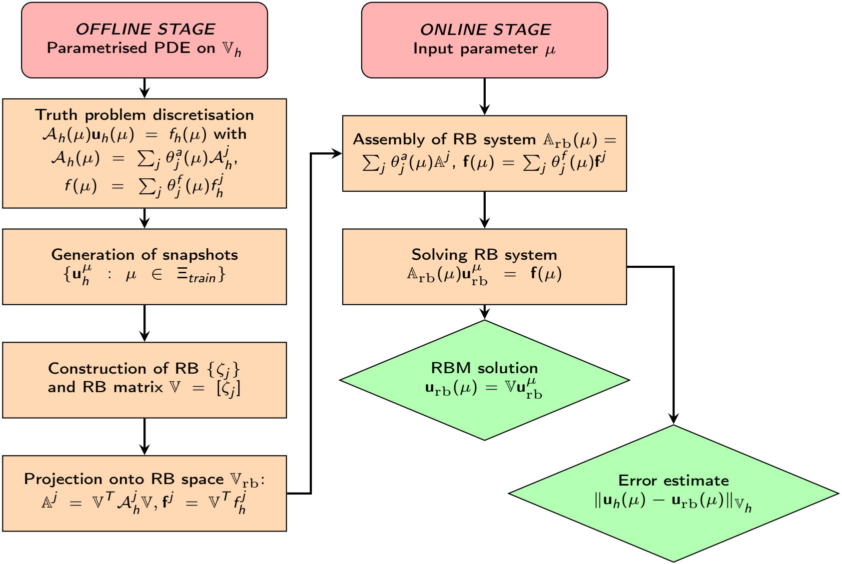
# Отправна точка

параметрична параболична задача с входен параметър $\mu \in \mathcal{M}$

$$\begin{aligned} \partial_t u(t,x) &= \mathcal{L}(u,t,x,\mu), \\ u(0,\cdot) &= u_0, \\ u(t,\cdot) &= 0 \text{ върху } \partial\Omega, \forall t \in (0, T_{max}], \\ \mathcal{M} &- \text{компактно множество}, \\ \mathcal{L} &- \text{елиптичен оператор} . \end{aligned} \tag{1}$$

ФОНД НАУЧНИ ИЗСЛЕДВАНИЯ
МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

# Схема на метода на редуцирания базис




(Quarteroni et al., 2016, стр. 9)

# POD-GREEDY алгоритъм

`Input:` $\Xi_{train}, N_1, N_2 \in \mathbb{N}, N_2 < N_1, N = 0, \ell = 1, \mathcal{Z} = \varnothing, \varepsilon_{tol}$

`While` $(\Delta(\mu_\ell) > \varepsilon_{tol})$ `do:`

1. `Compute trajectory` $U_h(\mu_\ell) = \{u_h^1(\mu_\ell), u_h^2(\mu_\ell), \dots u_h^k(\mu_\ell)\}$
2. `Retain` $N_1$ `principal nodes:` $\{\zeta_j\}_{j=1}^{N_1} \leftarrow \mathtt{POD}(U_h(\mu_\ell), N_1)$
3. `Enrich the basis:` $\mathcal{Z} \leftarrow \mathbb{V}_{\mathrm{rb}} \cup \{\zeta_j\}_{j=1}^{N_1}$
4. $N \leftarrow N + N_2$
5. `Retain` $N$ `principal nodes:` $\{\xi_j\}_{j=1}^{N} \leftarrow \mathtt{POD}(\mathcal{Z}, N)$
6. $\mathbb{V}_{\mathrm{rb}} \leftarrow \mathrm{span}\{\xi_j\}_{j=1}^{N}$
7. $\mu_{\ell+1} \leftarrow \arg\max_{\mu \in \Xi_{train}} \Delta(\mu)$
8. $\ell \leftarrow \ell + 1$

`Output:` $\mathbb{V}_{\mathrm{rb}}, N$

# Постановка

Използваме метода на крайните елементи и равномерна мрежа във времето със стъпка $\tau$ с подходяща схема за интегриране (неявна ойлерова схема)

Пресмятаме приближението $u_h^k(\mu)$ на точното решение $u(t_k, \cdot; \mu)$ във възли $t_k \stackrel{\text{def}}{=} k\tau, k \in \mathbb{N}$

Решението за $k$-тия слой се получава от нелинейна елиптична задача:

$$\mathcal{A}^k(\mu)(u_h^k(\mu)) = f^{(k-1)}(\mu) \ ,$$

която решаваме по метода на Нютон

# Изследвани модели

- логистичен растеж

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= d_1 \Delta u + u(\mu - u),\\ u(x,t) &= 0, \quad x \in \partial\Omega, t \in [0, t_{max}]\end{aligned} \tag{2}$$

- Лотка-Волтера

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_1}{\partial t} &= d_1 \Delta u_1 + u_1(a_1(\mu) - u_1 - c_1 u_2),\\ \frac{\partial u_2}{\partial t} &= d_2 \Delta u_2 + u_2(a_2 - u_2 - c_2 u_1)\\ u_1(t,x) &= u_2(t,x) = 0, x \in \partial\Omega, t \in [0, t_{max}]\end{aligned} \tag{3}$$

$f$ – нелинейната функция

# Energy norm

Въвеждаме

$$\|w\|_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\alpha(w,w)}:$$

- $\alpha(u,v) \stackrel{\text{def}}{=} \int_\Omega d_1 \nabla u \cdot \nabla v \;dx, \quad u,v \in H_0^1(\Omega)$
- $\alpha(u,v) \stackrel{\text{def}}{=} \int_\Omega d_1 \nabla u_1 \cdot \nabla v_1 \;dx + \int_\Omega d_2 \nabla u_2 \cdot \nabla v_2 \;dx, \quad u,v \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$

Имаме

$$a_{min}\|w\|_\alpha \le \alpha(w,w)$$
$$\alpha(u,v) \le \gamma_{max}\|u\|_\alpha \|v\|_\alpha$$

# Апостериорна оценка на грешката

Въвеждаме резидуум

$$r^k(\phi;\mu) = \langle f(u^k_{\mathrm{rb}};\mu),\phi\rangle - \frac{1}{\tau}\langle u^k_{\mathrm{rb}} - u^{k-1}_{\mathrm{rb}},\phi\rangle - \alpha(u^k_{\mathrm{rb}},\phi), \quad \forall\phi\in\mathbb{V}_h. \tag{4}$$

и норма

$$\|r^k(\cdot;\mu)\|_* \stackrel{\mathsf{def}}{=} \sup_{\phi\in\mathbb{V}_h} \frac{|r^k(\phi;\mu)|}{\|\phi\|_\alpha} \,. \tag{5}$$

# Оценка на грешката в $k$-тия слой

Нека $f$ е (локално) липшицова с константа $\ell_{sup}$ и $\tau < \frac{1}{2\ell_{sup}}$. Апроксимационната грешка в $k$-тия слой $k\tau$,

$$e_k(\mu) = u_h^k(\mu) - u_{\mathrm{rb}}^k(\mu),$$

при неявната ойлерова схеме може да бъде оценена по следния начин:

$$\|e_k(\mu)\|_{L^2}^2 \leq \frac{\|e_0\|_{L^2}^2}{(1-2\tau\ell_{sup})^k} + \frac{\tau}{a_{min}} \sum_{j=1}^{k} \frac{\|r^j(\mu)\|_*^2}{(1-2\tau\ell_{sup})^{k+1-j}} \qquad (6)$$

използваме $\Delta_N(\mu) = \|e_k(\mu)\|_{L^2}$

# Офлайн етап: решение

Решението в подпространството на редуцирания базис за $k$-тия слой (по метода на Нютон) и апостериорната оценка на грешката се пресмятат с помощта на матрици и тримерни масиви, образувани от елементите на редуцирания базис.

Използваме

- $\Omega = [0, 10]^2$
- $u_1(0, x, y) = \sin \pi x \sin \pi y$ (задача (2)); $u_2(0, \cdot) = u_1(0, \cdot)$ (задача (3))

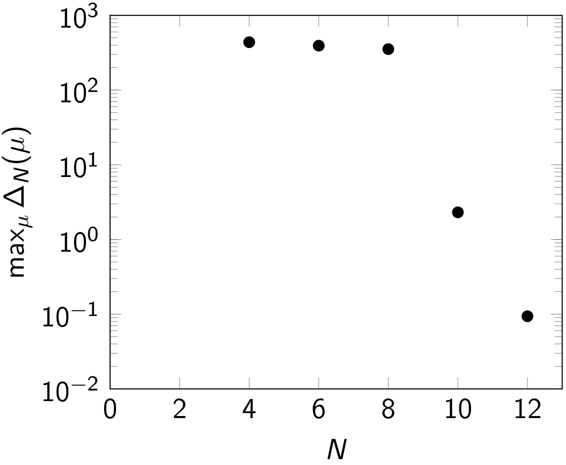
# Онлайн етап: проверка на ефективност

- CPU time gain factor $= \dfrac{\text{CPU time truth}}{\text{CPU time RB}}$
- грешка на апроксимация

$$\|e_{T_{end}}(\mu)\|_2 = \|u_{\mathrm{rb}}(\mu, T_{end}) - u_h(\mu, T_{end})\|_2$$

# Числен експеримент: логистичен растеж (2)

Фигура: $\mu \in [1, 1.15], t \in [0, 1], \tau = 0.02, |\mathbb{V}_h| = 6561, N_1 = 4, N_2 = 2, \Xi_{train} = \{1, 1.03, 1.06, \dots 1.48\}, \varepsilon_{tol} = 0.1$



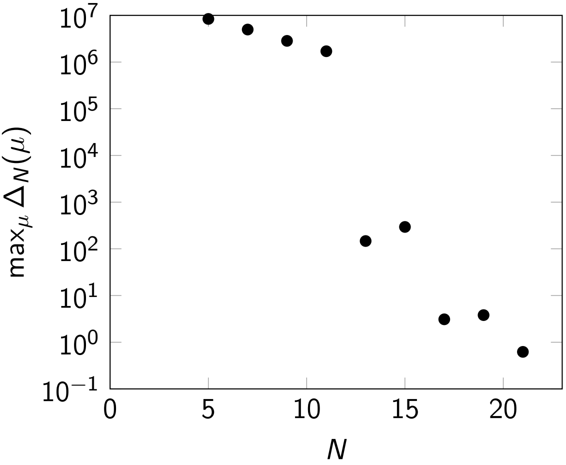
# Числен експеримент: резултати

| $\mu$ | CPU time gain factor | $\|e_{T_{end}}(\mu)\|_2$ |
|---|---|---|
| 1.03 | 14.0966 | 0.00508685 |
| 1.17 | 14.0986 | 0.00580960 |
| 1.26 | 14.1912 | 0.00627375 |
| 1.38 | 13.7241 | 0.00688618 |
| 1.47 | 13.8146 | 0.00733917 |

Таблица: Офлайн тестване, РБ с $|\mathbb{V}_{\mathrm{rb}}| = 12$. CPU time gain factor = CPU time truth/CPU time RB, $L^2$-апр. грешка $\|u_{\mathrm{rb}}(T_{end}) - u_h(T_{end})\|$. Грешката е под получената при алчния алгоритъм $\varepsilon_{tol} = 0.093$.

# Числен експеримент: логистичен растеж (2)

Фигура: $\mu \in [1, 1.15], t \in [0, 3], \tau = 0.02, |\mathbb{V}_h| = 6561, N_1 = 5, N_2 = 2, \Xi_{train} = \{1, 1.05, 1.1, \dots 1.5\}, \varepsilon_{tol} = 1$



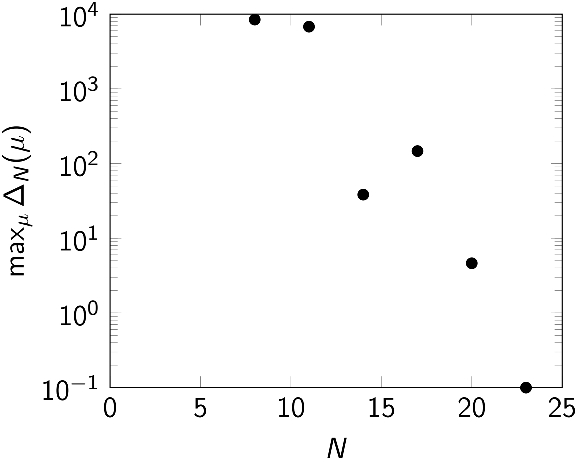
# Числен експеримент: резултати

| $\mu$ | CPU time gain factor | $\|e_{T_{end}}(\mu)\|_2$ |
|---|---|---|
| 1.03 | 3.32329 | 0.0102786 |
| 1.17 | 3.33476 | 0.0113846 |
| 1.26 | 3.25391 | 0.0120744 |
| 1.38 | 3.27851 | 0.0129604 |
| 1.47 | 3.27096 | 0.0135968 |

Таблица: Офлайн тестване, РБ с $|\mathbb{V}_{\mathrm{rb}}| = 21$. Грешката е под получената при алчния алгоритъм $\varepsilon_{tol} = 0.62$.

## Числен експеримент: Лотка-Волтера (3)

Фигура: $\mu \in [0, 0.15], t \in [0, 4], \tau = 0.05, |\mathbb{V}_h| = 6561, N_1 = 8, N_2 = 3, \Xi_{train} = \{0, 0.03, 0.06, \dots 0.15\}, \varepsilon_{tol} = 1$



# Числен експеримент: резултати

| $\mu$ | CPU time gain factor | $\|e_{T_{end}}(\mu)\|_2$ |
|---|---|---|
| 0.04 | 8.05688 | 0.00016748 |
| 0.07 | 8.05724 | 0.000157639 |
| 0.11 | 8.32901 | 0.000148481 |

Таблица: Офлайн тестване, РБ с $\dim \mathbb{V}_{rb} = 23$.

M. A. Grepl and A. T. Patera. A posteriori error bounds for reduced-basis approximations of parametrized parabolic partial differential equations. *ESAIM: Modélisation Mathématique et Analyse Numérique*, 39:157–181, 2005.

B. Haasdonk and M. Ohlberger. Reduced basis method for finite volume approximations of parametrized linear evolution equations. *ESAIM: Modélisation Mathématique et Analyse Numérique*, 42:277–302, 2008.

J. S. Hesthaven, G. Rozza, and B. Stamm. *Certified Reduced Basis Methods for Parametrized Partial Differential Equations*. Springer International, 2016.

A. Quarteroni, A. Manzoni, and F. Negri. *Reduced Basis Methods for Partial Differential Equations*. Springer International, 2016.