

Кратко въведение в метода на редуцирания базис

Петър Рашков

Секция „Математическо моделиране и числен анализ“

Институт по математика и информатика-БАН

15 септември 2020 г.

Резюме

Дадено е кратко теоретично описание на метода на редуцирания базис за елиптични задачи, дискретизирани с помощта на метода на крайните елементи. Описани са два подхода за построение на редуцирания базис – със средствата на правилното ортогонално разлагане и с помощта на алчен алгоритъм. Алчният алгоритъм е придружен от *a posteriori* оценка на грешката.

Въведение

Нека разгледаме следната параметризирана задача за еволюцията на неизвестното $u(x, t, \mu)$, $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, която зависи от следния закон

$$\partial_t u(x, t, \mu) + \mathcal{F}(t, \mu)(u(x, t, \mu)) = 0. \quad (1)$$

В горното параметризирано частно диференциално уравнение, $\mathcal{F}(t, \mu)$ означава пространствен диференциален оператор, който зависи от свободен параметър $\mu \in \mathcal{P}$ и от времето $t \in [0, T]$. Към горната задача са зададени и съответни гранични и начални условия.

При дадени начални условия $u_0(x, \mu)$ задачата има решение в някакво пространство, което може да бъде пресметнато приближено с помощта на числени методи, основани на метода на крайните елементи/обеми за дискретизиране на пространствените производни в Ω и разнообразни методи за интегриране по времето (напр. Рунге-Кута).

Ние се интересуваме как да улесним решаването на подобен тип задачи, ако е необходимо да се намерят решенията за различни стойности на входния параметър μ . Решението, основано на гореописаните способи за дискретизиране на пространствените производни, принадлежи на пространство $\mathbb{V}_h$ с висока размерност, за да бъде висококачествено и да приближава добре решението на изходната задача.

Ако разгледаме $\mathbb{V}_h$ като пространство на крайни елементи, задачата в най-широката общност се свежда след алгебрични преобразувания до следната слаба форма

$$\langle \partial_t u_h(x, t, \mu), v \rangle + a_\mu(u_h(x, t, \mu), v) = f_\mu(v), \quad \forall v \in \mathbb{V}_h, \quad (2)$$

където $a_\mu(\cdot, \cdot)$ е билинейна форма, а f_μ е линеен функционал, които зависят от свободния параметър. Решенията $u_h(x, t, \mu) \in \mathbb{V}_h$ са в пространство с висока размерност, което удовлетворява условия за необходимата точност на численото решение към решението на изходната задача.

Тъй като при всяка нова стойност на входния параметър μ трябва да се решава (линейна) система с висока размерност, изчислителните разходи са твърде високи, ако се налага да се решава горната система отново и отново.

Използването на метода на редуцирания базис (от англ. *reduced-basis method*, съкр. МРБ) може да улесни този тип изчисления [Quarteroni et al., 2016]. Този метод се прилага за апроксимация на решения на параметризирани елиптични задачи, които са дискретизирани посредством метод на крайните елементи с достатъчна точност от решения на задачи с по-малка изчислителна сложност, чието многократно решение е по-евтино и по-бързо за изпълнение.

Силата на метода на редуцирания базис произтича от свойството, че множеството от решенията на дадено параметризирано частно диференциално уравнение

може да бъде приближено от линейни комбинации от елементи, извлечени от подмножеството от решенията на изходната задача. Този процес протича в т.нар. офлайн етап, където се пресмятат приближения на обекти, не зависещи от стойностите на входния параметър.

Успехът на метода на редуцирания базис зависи от способността да се пресметне решението за нови стойности на свободния параметър на независима от размерността на първоначалната задача цена. Този процес протича в т.нар. онлайн етап, където въз основа на обектите, получени на офлайн етапа се построяват решения за произволни стойности на входния параметър.

Ясно е, че апроксимациите, получени по метода на редуцирания базис, ще зависят от конкретната задача, защото схемата за нейната дискретизация също зависи от задачата. За съжаление редуцираният базис в повечето случаи няма как да бъде свързан с определени пространствени или времеви свойства на изходната задача [Hesthaven et al., 2016]. Елементите от базиса могат дори да не бъдат решения на задачата.

В този доклад ще се разгледат накратко основните положения на метода на редуцирания базис, които включват алгебрична формулировка, методи за построението му, опиращи се на правилното ортогонално разлагане (POD, от англ. *proper orthogonal decomposition*) и на алчни алгоритми (от англ. *greedy algorithms*). Методът на алчните алгоритми изисква и оценка за грешката на апроксимация, която да позволи бързо намиране на базиса при офлайн-етапа. За тази цел ще бъде описан метод за оценка чрез нормата на остатъка при апроксимации с РБ.

Глава 1

Метод на редуцирания базис

Започваме с параметризирана дискретна елиптична задача. Нека е дадено пространство от крайни елементи $\mathbb{V}_h$, билинейна форма a_μ и линейен функционал f_μ , които са получени при дискретизиране на дадена елиптична задача. Целта е да се намери функция $u_h(\mu) \in \mathbb{V}_h$, такава че

$$a_\mu(u_h(\mu), v) = f_\mu(v), \quad \forall v \in \mathbb{V}_h. \quad (1.1)$$

за всяка стойност на входния параметър $\mu \in \mathcal{P}$. Допускаме, че задачата (1.1) е добре обусловена, с други думи, билинейната форма a_μ е непрекъсната за всяко $\mu \in \mathcal{P}$, или с други думи

$$|a_\mu(u, v)| \leq \gamma_h(\mu) \|u\|_{\mathbb{V}_h} \|v\|_{\mathbb{V}_h}, \quad \forall u, v \in \mathbb{V}_h, \forall \mu \in \mathcal{P};$$

че е изпълнено неравенството

$$\alpha_h(\mu) = \frac{a_\mu(v, v)}{\|v\|_{\mathbb{V}_h}^2} > 0, \quad \forall v \in \mathbb{V}_h, \forall \mu \in \mathcal{P};$$

и че линейният функционал f_μ е ограничен за всяко $\mu \in \mathcal{P}$. Числата α_h, γ_h зависят от пространството от крайни елементи $\mathbb{V}_h$ и от триангулацията на областта Ciarlet [2002].

От лемата на Лакс-Милграм следва, че задачата (1.1) има единствено решение.

Ще наричаме решението $u_h(\mu)$ *истинско приближение* на точното решение, а $\mathbb{V}_h$ *пространство на истинските приближения* (от англ. *truth approximation space*). Решението е наречено по този начин, защото се предполага, че пространството $\mathbb{V}_h$ е избрано по такъв начин, че решението u_h приближава точното решение на изходната задача със задоволителна точност.

Горната задача води до решаване на следната линейна система:

$$\mathbf{A}_h(\mu) \mathbf{u}_h = \mathbf{f}_h(\mu),$$

където матрицата $\mathbf{A}_h(\mu)$ е с висока размерност.

Решението на задачата (1.1) в пространството на истинските приближения $\mathbb{V}_h$ ще зависи от стойността на свободния параметър μ . За дадена стойност на параметъра

μ означаваме решението с $u_h(\mu)$ и съвкупността от решенията за всички стойности на μ определя многообразието от решения

$$\mathcal{M} := \{u_h(\mu) | \mu \in \mathcal{P}\}. \quad (1.2)$$

Основно положение при метода на редуцирания базис е допускането, че $\dim \mathcal{M} \ll \dim \mathbb{V}_h$. Вместо да решава параметризираната задача върху цялото $\mathbb{V}_h$, методът на редуцирания базис използва това положение да намали изчислителната сложност на задача (1.1) и всъщност да апроксимира решението чрез функция, намиращи се в подпространство с много по-ниска размерност от $\dim \mathbb{V}_h$. Така добри апроксимации на $u_h(\mu)$ могат да се построят от пространство на редуциран базис $\mathbb{V}_{RB}$ с размерност $N = \dim \mathbb{V}_{RB} \ll \dim \mathbb{V}_h$. За тази цел методът търси ортонормиран базис $\{\phi_i | 1 \leq i \leq N\}$, който е построен от малък набор от решения на първоначалната висококачествена задача (1.1) за ограничен брой стойности на параметъра $\mu_i, 1 \leq i \leq N$ (така наречени „моментни снимки“, от англ. *snapshots*). Този базис се нарича *редуциран* и имаме съответно

$$\mathbb{V}_{RB} = \text{span } u(\mu_i) = \text{span } \phi_i \subset \mathbb{V}_h$$

и за дадена точност $\epsilon > 0$ е изпълнено $\|u_h(\mu) - u_N(\mu)\|_{\mathbb{V}} < \epsilon$, където $u_N(\mu)$ е решението на задачата в редуцирания базис

$$a_\mu(u_N(\mu), v) = f_\mu(v), \quad \forall v \in \mathbb{V}_{RB}. \quad (1.3)$$

От гореизложеното сме длъжни да внесем следното уточнение за типа гранични условия, които са съвместими с метода на редуцирания базис. Поради линейното построение на решенията следва да забележим, че с този метод могат да се решават задачи с гранични условия от тип на Дирихле или Нойман. Ако граничните условия са нелинейни от смесен тип, те невинаги ще бъдат удовлетворени.

Построението на приближеното решение в пространството на редуцирания базис повдига няколко въпроса: как да пресметнем грешката и кога е възможно да се построи такъв базис. Очевидно е, че построението на такъв редуциран базис зависи от разглежданата задача – в някои случаи то може да е невъзможно.

1.1 Алгебрична формулировка

Задачата (1.3) е добре обусловена, щом изходната задача (1.1) е добре обусловена. Това следва от наблюдението, че от $\mathbb{V}_{RB} \subset \mathbb{V}_h$ следва, че

$$\alpha_N(\mu) = \frac{a_\mu(v, v)}{\|v\|_{\mathbb{V}_{RB}}^2} \geq \alpha_h(\mu) > 0.$$

Също така понеже е изпълнено

$$a_\mu(u_h(\mu), v) = f_\mu(v), \quad \forall v \in \mathbb{V}_{RB},$$

извеждаме равенството

$$a_\mu(u_h(\mu) - u_N(\mu), v) = 0, \quad \forall v \in \mathbb{V}_{RB}.$$

От него следва, че грешката между истинското приближение $u_h(\mu)$ и решението по метода на РБ $u_N(\mu)$ е ортогонална на $\mathbb{V}_{RB}$, т.е. решението, получено по метода на РБ, $u_N(\mu)$ е проекция на истинското приближение върху $\mathbb{V}_{RB}$ спрямо скаларното произведение, определено с билинейната форма a_μ . С други думи, този метод е проекция на Галъоркин.

Да допуснем, че имаме следното представяне на решение $u_N(\mu)$ в ортонормирания РБ:

$$u_N(\mu) = \sum_{i=1}^N \mathbf{u}_i(\mu) \phi_i, \quad (1.4)$$

където $\mathbf{u}(\mu) = (\mathbf{u}_i(\mu))_{i=1}^N$ е векторът от коефициентите. Замествайки (1.4) в (1.3) и полагайки $v = \phi_j$, получаваме

$$a_\mu\left(\sum_{i=1}^N \mathbf{u}_i(\mu) \phi_i, \phi_j\right) = \sum_{i=1}^N \mathbf{u}_i(\mu) a_\mu(\phi_i, \phi_j) = f_\mu(\phi_j), \quad j = 1, \dots, N. \quad (1.5)$$

С полагане $(\mathbf{A}_N(\mu))_{ji} = a_\mu(\phi_i, \phi_j)$ и $\mathbf{f}(\mu) = (f_\mu(\phi_j))_{j=1}^N$ получаваме следната алгебрична система:

$$\mathbf{A}_N(\mu) \mathbf{u}(\mu) = \mathbf{f}(\mu).$$

За разлика от *разредената* матрица $\mathbf{A}_h$ матрицата $\mathbf{A}_N$ е плътна. Следователно за да бъде успешен методът на редуцирания базис в практиката, трябва матрицата $\mathbf{A}_N$ да е с ниска размерност, за да не се увеличат изчислителните разходи. Трябва да се отбележи обаче, че ако $\mathbf{A}_h$ е симетрична и положително дефинитна, то същите свойства важат и за $\mathbf{A}_N$ Quarteroni et al. [2016, стр. 52].

Сглобяването на матрицата $\mathbf{A}_N$ и вектора $\mathbf{f}$ също е работа с висока изчислителна сложност, зависеща от $\dim \mathbb{V}_h$. Затова ще разгледаме специалния случай на афинна зависимост от параметъра.

1.1.1 Афинна зависимост от параметъра

За да бъде още по-успешен, методът на редуцирания базис може да бъде ускорен от *афинната зависимост от параметъра* на разглежданата задача. Това ще ни помогне да запишем $\mathbf{A}_N(\mu), \mathbf{f}(\mu)$ като линейна комбинация от матрици и вектори, които не зависят от стойността на свободния параметър μ .

Да допуснем, че съществуват константи q_a, q_f и независими от μ форми a_k и функционали f_k , такива че

$$\begin{aligned} a_\mu(u, v) &= \sum_{k=1}^{q_a} q_k^a(\mu) a_k(u, v) \\ f_\mu(v) &= \sum_{k=1}^{q_f} q_k^f(\mu) f_k(v). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Тогава лесно се установява, че

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_N(\mu) &= \sum_{k=1}^{q_a} q_k^a(\mu) \mathbf{A}^{(k)} \\ \mathbf{f}(\mu) &= \sum_{k=1}^{q_f} q_k^f(\mu) \mathbf{f}^{(k)},\end{aligned}\tag{1.7}$$

където $(\mathbf{A}^{(k)})_{ji} = a_k(\phi_i, \phi_j)$, $\mathbf{f}^{(k)} = (f_k(\phi_j))_{j=1}^N$.

Подчертаваме, че афинната зависимост от параметъра води до пресмятане на матрици $\mathbf{A}^{(k)}$ и вектори $\mathbf{f}^{(k)}$, които не зависят от параметъра μ . Те могат да бъдат пресметнати и запаметени по време на офлайн-етапа и от тях да бъде получена съответната матрица $\mathbf{A}_N(\mu)$ и вектор $\mathbf{f}(\mu)$.

1.2 Построение на редуциран базис

Изхождайки от основното положение на метода на редуцирания базис, трябва да намерим подходящо множество от стойности μ_i на свободния параметър μ , такива че всеки елемент от $\mathcal{M}$ да бъде добре апроксимиран от елемент в $\mathbb{V}_{RB}$.

Остава въпросът как да се оцени размерността на $\mathbb{V}_{RB}$.

Може да се използва *анализ на главните компоненти* (*principal component analysis*), за да се провери дали изобщо е възможно да се използва този метод.

Ако отговорът е да, то трябва да изберем по подходящ начин стойностите на μ за моментните снимки, от които да се построи базисът.

1.2.1 POD-RB

Правилното ортогонално разлагане (POD, англ. *proper orthogonal decomposition*) е метод, който се опира на стратегията да изследват и компресират вектори (в нашия случай това са моментни снимки за определени стойности на входния параметър μ) от дадено параметрично множество $\mathbb{P}$ с кардиналност $|\mathbb{P}| = p$. Така се намалява размерността на множеството от истинските приближения чрез представяне в ортонормиран базис, който е оптимален в смисъла на най-малките квадрати. По този начин се пресява най-значимото съдържание от тях (напр. запазване на най-голям дял от $\mathbb{V}$ -нормата). Този метод е тъждествен на анализа на главните компоненти в статистиката.

N -мерното POD-пространство на РБ $\mathbb{V}_{RB}$ е онова N -мерно подпространство на $\mathbb{V}_h(\mathbb{P}) = \text{span}\{u_h(\mu) | \mu \in \mathbb{P}\}$, което удовлетворява минимизационната задача:

$$\sqrt{\frac{1}{p} \sum_{\mu \in \mathbb{P}} \inf_{v \in \mathbb{V}_{RB}, \dim \mathbb{V}_{RB} = N} \|u_h(\mu) - v\|_{\mathbb{V}}^2} \rightarrow \min.$$

Ще припомним няколко основни положения от теорията на фреймовете. Разглеждаме оператора на синтеза $\mathbb{S} = [u_h(\mu_1) | \dots | u_h(\mu_p)]$, който изобразява

$$\mathbb{S} : \mathbb{C}^p \rightarrow \mathbb{C}^{|\mathcal{M}|}, \quad \mathbb{S} \mathbf{c} = \sum_i \mathbf{c}_i u_h(\mu_i)$$

със спрегнат оператор на анализ $\mathbb{S}^* : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}^p$:

$$\mathbb{S}^* v = \{\langle v, u(\mu_i) \rangle\}_{\mu_i \in \mathbb{P}}.$$

Матрицата на оператора на синтеза е матрицата със стълбове от моментните снимки.

Разглеждаме фреймовия оператор $\Phi : \mathbb{V}_h(\mathbb{P}) \rightarrow \mathbb{V}_h(\mathbb{P})$:

$$\Phi(v) := \mathbb{S}\mathbb{S}^* v = \sum_{\mu_i \in \mathbb{P}} \langle v, u(\mu_i) \rangle_{\mathbb{V}} u(\mu_i).$$

Известно е, че Φ е обратим и самоспрегнат [Christensen, 2003, стр. 5]. Тогава собствените стойности на Φ са реални и собствените стойности и функции на Φ са зададени с тези на спрегнатия оператор $\Phi^* = S^* S$.

Също така ортогоналната проекция $P : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{V}_h(\mathbb{P})$ е зададена с

$$P_N f = \frac{1}{M} \sum_{\mu \in \mathbb{P}} \langle v, \Phi^{-1} u(\mu_i) \rangle_{\mathbb{V}} u(\mu_i).$$

POD-базисът е зададен от собствените функции $\zeta_1, \dots, \zeta_p$ на Φ , които съответстват на собствените стойности $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p$. Тогава получаваме редуцирания базис $\mathbb{V}_{POD}$ чрез нормализация на ζ_i . Добре е известно, че ако търсим най-доброто приближение на v измежду всички N -мерни подпространства, е достатъчно да разгледаме проекцията

$$P_N(v) = \sum_{i=1}^N \langle v, \zeta_i \rangle_{\mathbb{V}} \zeta_i,$$

и тогава е изпълнено равенството

$$\sqrt{\frac{1}{M} \sum_{\mu \in \mathbb{P}} \|u_h(\mu) - P_N(u_h(\mu))\|_{\mathbb{V}}^2} = \sqrt{\sum_{i=N+1}^p \lambda_i^2}.$$

От изложеното по-горе следва, че от алгебрична гледна точка спрегнатият оператор на фреймовия оператор е зададен с *корелационната матрица на моментните снимки* (*snapshot correlation matrix*), която означаваме с $\mathbf{C}$. Нейните елементи са пресметнати от скаларното произведение на всички двойки моментни снимки:

$$\mathbf{C}_{ij} = \frac{1}{M} \langle u(\mu_i), u(\mu_j) \rangle_{\mathbb{V}}.$$

Нейните собствени стойности са $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_M$ със собствени вектори $\psi_1, \dots, \psi_M$. Тогава е изпълнено

$$\zeta_j = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{i=1}^M \psi_j(i) u(\mu_i),$$

където $\psi_j(i)$ е i -ят елемент на собствения вектор ψ_j .

Въпреки че този POD-метод дава възможност да намерим приближение със зададена точност на множеството $\mathcal{M}$, основният му недостатък е, че построението на POD-RB може да изисква твърде голяма размерност p , за да се получи RB с N елемента.

1.2.2 Алчен алгоритъм

Друг възможен подход за построение се опира на метода на *алчен алгоритъм*. Този алгоритъм се използва в численото оптимизиране, за да получи оптимално решение на дадена задача като на всяка итерация се намира елемент, който изпълнява локален оптимален критерий. В контекста на методите на редуциран базис алчният алгоритъм построява на всяка стъпка подпространство с добавяне на нов вектор от базиса вместо да търси решение над всички N -мерни подпространства.

Така се получават поредица вложени едно в друго подпространства, докато се получи желаната точност на приближение.

Алгоритъм 1 Пример за алчен алгоритъм

Дадено е подмножество на $\mathcal{P}$, $\Xi_n = \{\mu_1, \dots, \mu_n\}$, $1 \leq n \leq N$.

Нека $\mathbb{V}_n = \text{span}\{u_h(\mu_i) : 1 \leq i \leq n\}$ е подпространство, определено от множеството моментни снимки $u_h(\mu_i)$, с ортонормиран базис $\mathbb{V}_{RB}^n = \{\phi_i | i = 1, \dots, n\}$. След това се намира

$$\mu_{n+1} := \arg \max_{\mu \in \mathcal{P}} \|u_h(\mu) - u_n(\mu)\|.$$

където $u_n(\mu)$ е решението на (1.3) в текущия редуциран базис $\mathbb{V}_{RB}^n$ и се полага $\Xi_{n+1} = \Xi_n \cup \{\mu_{n+1}\}$. Намира се следващият редуциран базис по метода на Грам-Шмит,

$$\mathbb{V}_{RB}^{n+1} := \text{GramSchmidt}([\phi_1 | \dots | \phi_n | u_h(\mu_{n+1})]).$$

С други думи, на всяка итерация се прибавя към базиса ортонормираната моментна снимка, чието приближение е най-лошо от елементите на съществуващия базис.

Така описан, този алчен алгоритъм обаче е твърде ресурсоемък, тъй като е необходимо да се реши оптимизационна задача върху цялото множество $\mathcal{P}$.

$\mathcal{P}$ може да бъде заменено от пробно множество Ξ_{train} с размерност $|\Xi_{train}| = n_{train}$.

Грешката на приближение $\|u_h(\mu) - u_n(\mu)\|$ може да бъде заменена с *a posteriori* оценка на грешката:

$$\|u_h(\mu) - u_n(\mu)\| \leq \Delta_n(\mu), \quad \forall \mu \in \mathcal{P}, \quad (1.8)$$

която да е лесно изчислима.

По този начин решението на оптимизационната задача се свежда до задача за намаляваща подредба на стойностите $\Delta_n(\mu)$, $\mu \in \Xi_{train}$ и избор на моментната снимка с най-голяма оценена грешка. Алгоритъмът приключва, когато се намери $N = \dim \mathbb{V}_{RB}$: $\max_{\mu \in \mathcal{P}} \Delta_N(\mu) < \epsilon$ за зададена точност ϵ .

Да отбележим, че при наличието на лесно изчислима оценка на грешката Δ_n кардиналността на пробното множество Ξ_{train} може да е голяма.

1.3 N -ширина на Колмогоров

Остава отворен въпросът колко добре може да се апроксимира истинското приближение от пространства на редуциран базис. За тази цел припомняме дефиницията на N -ширина на Колмогоров в този контекст.

Дефиниция 1. Нека $\mathcal{M}$ е многообразието от решения (1.2), а $\mathbb{V}_{RB}$ е пространство на редуциран базис с $\dim \mathbb{V}_{RB} = N$. N -ширина на Колмогоров $d_N(\mathcal{M})$ показва доколко се апроксимира елемент $u \in \mathcal{M}$ с елемент $v \in \mathbb{V}_{RB}$ измежду всички N -мерни подпространства $\mathbb{V}_{RB}$ и е зададена с

$$d_N(\mathcal{M}) := \inf_{\mathbb{V}_{RB}} \sup_{u \in \mathcal{M}} \inf_{v \in \mathbb{V}_{RB}} \|u - v\|_{\mathbb{V}};$$

Ако $d_N(\mathcal{M})$ намалява достатъчно бързо с N , то многообразието $\mathcal{M}$ може да бъде добре апроксимирано от пространство на редуциран базис с ниска размерност.

Ако N -ширината на Колмогоров $d_N(\mathcal{M})$ намалява експоненциално и съществува редуциран базис, то алчният алгоритъм ще го намери с експоненциална сходимост.

Глава 2

a posteriori оценка на грешката

При елиптични задачи основната цел при избор на РБ са точността на апроксимацията и минималният изчислителен разход.

За да бъде *алчният алгоритъм* при офлайн-етапа достатъчно ефективен при построението на редуцирания базис, трябва да се намери лесно изчислима *a posteriori* оценка на апроксимационната грешка Δ_n . Тя от една страна ще позволи добра апроксимация на решението за различни стойности на входния параметър, тъй като базисът може да бъде „трениран“ при изпълнението на офлайн етапа на достатъчно фини пробни множества Ξ_{train} и от друга страна ще гарантира достатъчно остра оценка на грешката при онлайн етапа за всяка стойност на входния параметър.

Ще опишем такава, опираща се на остатъка от апроксимацията. Разглеждаме апроксимация на решението $u_h(\mu)$ на (1.1) от решение $u_N(\mu)$ в пространство на редуциран базис $\mathbb{V}_{RB}$ с размерност $N = \dim \mathbb{V}_{RB} \ll \dim \mathbb{V}_h$. Да означим с $e_N(\mu) = u_h(\mu) - u_N(\mu)$ грешката на приближение. Тя удовлетворява следното уравнение

$$a_\mu(e_N(\mu), v) = f_\mu(v) - a_\mu(u_N(\mu), v), \quad \forall v \in \mathbb{V}_h. \quad (2.1)$$

Полагаме остатъка $r_\mu(\cdot) \in \mathbb{V}'_h$ с линейния функционал

$$r_\mu(v) = f_\mu(v) - a_\mu(u_N(\mu), v), \quad \forall v \in \mathbb{V}_h.$$

От теоремата на Рис за представяннията на линейните функционали следва, че съществува единствен елемент $\hat{r}(\mu) \in \mathbb{V}_h$, такъв че $\langle \hat{r}(\mu), v \rangle_{\mathbb{V}_h} = r_\mu(v)$. Освен това

$$\|\hat{r}(\mu)\|_{\mathbb{V}_h} = \|r_\mu\|_{\mathbb{V}'_h} = \sup_{v \in \mathbb{V}_h} \frac{\|r_\mu(v)\|_{\mathbb{V}_h}}{\|v\|_{\mathbb{V}_h}}, \quad (2.2)$$

а уравнението за грешката на апроксимация се свежда до

$$a_\mu(e_N(\mu), v) = \langle \hat{r}(\mu), v \rangle_{\mathbb{V}_h}, \quad \forall v \in \mathbb{V}_h. \quad (2.3)$$

Отбелязваме, че ако приведем r_μ в алгебрична форма, то пресмятането на остатъка r_μ зависи от матрицата $\mathbf{A}(\mu)$ и вектора $\mathbf{f}(\mu)$ и от пресметнатото решение в пространството на редуцирания базис.

От непрекъснатостта на билинейната форма следва, че

$$|r_\mu(v)| \leq \gamma_h(\mu) \|e_N(\mu)\|_{\mathbb{V}_h} \|v\|_{\mathbb{V}_h}, \quad \forall v \in \mathbb{V}_h,$$

а със заместване в (2.2) извеждаме горната граница:

$$\|r_\mu\|_{\mathbb{V}'_h} \leq \gamma_h(\mu) \|e_N(\mu)\|_{\mathbb{V}_h}, \quad \forall v \in \mathbb{V}_h. \quad (2.4)$$

Използвайки добрата обусловеност на $a_\mu(\cdot, \cdot)$ имаме:

$$\alpha_h(\mu) \|e_N(\mu)\|_{\mathbb{V}_h}^2 \leq |r_\mu(e_N(\mu))|, \quad (2.5)$$

от което следва $\alpha_h(\mu) \|e_N(\mu)\|_{\mathbb{V}_h} \leq \|r_\mu\|_{\mathbb{V}'_h}$. Така получаваме двойното неравенство за оценка на нормата на грешката на апроксимация $e_N(\mu)$ и спрегнатата норма на остатъка $\|r_\mu\|_{\mathbb{V}'_h}$:

$$\frac{1}{\gamma_h(\mu)} \|r_\mu\|_{\mathbb{V}'_h} \leq \|e_N(\mu)\|_{\mathbb{V}_h} \leq \frac{1}{\alpha_h(\mu)} \|r_\mu\|_{\mathbb{V}'_h} \quad (2.6)$$

Първо да забележим, че частното $\frac{\gamma_h(\mu)}{\alpha_h(\mu)}$ е равнозначено на числото на обусловеност на матрицата $\mathbf{A}_h(\mu)$ (частното на най-голямото и най-малкото ѝ собствено число).

Числото $\Delta_N(\mu) := \frac{1}{\alpha_h(\mu)} \|r_\mu\|_{\mathbb{V}'_h}$ може да играе роля на *a posteriori* оценка на грешката $e_N(\mu)$ поради (2.6). Означаваме с

$$\eta_N(\mu) = \frac{\Delta_N(\mu)}{\|e_N(\mu)\|_{\mathbb{V}_h}}$$

фактора на ефективност, който показва колко строга е оценката на грешката – тъй като $1 \leq \eta_N(\mu) \leq \frac{\gamma_h(\mu)}{\alpha_h(\mu)}$, колкото е по-близо $\eta_N(\mu)$ до 1, толкова по-строга е оценката на грешката.

По дефиниция, горната граница на $\eta_N(\mu)$ не зависи от размерността на пространството на редуцирания базис N и следователно е устойчива на действието на алчния алгоритъм! Ако обаче изходната задача е зле обусловена и съответното число на матрицата $\mathbf{A}_h(\mu)$ е голямо, факторът на ефективност ще бъде неточен.

Благодарности

Авторът изказва благодарност за финансиране по Националната научна програма „Петър Берон и НИЕ“ на МОН с договор № КП-06-ДБ-5.

Библиография

- O. Christensen. *An introduction to frames and Riesz bases*. Birkhäuser, 2003.
- P. G. Ciarlet. *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. SIAM Philadelphia, 2002.
- J. Hesthaven, G. Rozza, and B. Stamm. *Certified Reduced Basis Methods for Parametrized Partial Differential Equations*. Springer, 2016.
- A. Quarteroni, A. Manzoni, and F. Negri. *Reduced Basis Methods for Partial Differential Equations*. Springer International Publishing, 2016.