

Приложения на еднаквостите в практиката

Ваня Лалева
Пловдив

Резюме

Разглеждаме няколко примера, с които да покажем на учениците, че математиката е възникнала в стремежа на хората да намерят решения на проблеми, появили се в реални ситуации.

Ключови думи

изследователски подход, проект Fibonacci, динамичен софтуер, еднаквости

1. Увод

Разглеждаме няколко възможности, с които да покажем на учениците, че математиката не е съвкупност от измислени понятия и твърдения, а е възникнала в стремежа на хората да намерят решения на проблеми, появили се в реални ситуации.

Темата **Еднаквости в равнината**, изучавана в осми клас, е от реално присъстващите преобразувания на фигури в бита и природата, за които почти всеки ученик може да посочи пример.

За **мотивиране** на необходимостта от изучаване на геометричното преобразование **Осева симетрия** и за **въвеждане** на понятието разглеждаме следната практическа задача:

Задача 1. Две селища се намират от едната страна на река. Необходимо е да се построи мост, който да ползват и двете селища. Изберете разположението им спрямо реката и определете мястото на моста, така, че да се построят възможно най-кратки пътища.

В динамичната среда GeoGebra, с помощта на инструментите **Права през две точки**  и **Точка** , построяваме модел на ситуацията (Фиг.1).

Избираме предполагаемото място на „моста“ и с инструментите **Отсечка**  и **Разстояние или дължина**  построяваме „пътищата“ и измерваме дължините им.

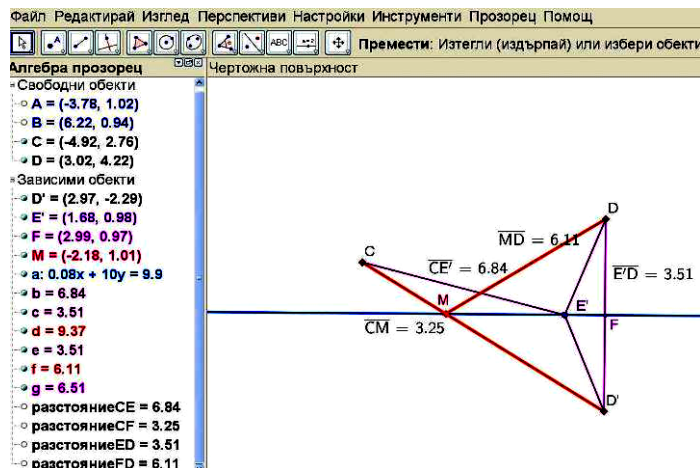
Експериментираме „преместване“ на „моста“ с инструмента **Премести** , като следим изменението на сбора от „дължините на пътищата“. Наблюдава се намаляване на този сбор до определено място, след което той отново се увеличава. Изградена е хипотезата, че такова място съществува. Остава да го намерим и да докажем, че тогава сборът от разстоянията е най-малък. Да помислим за решението на задачата, ако селищата се намират на същите разстояния от реката, но в различни полуравнини относно реката. С инструментите **Перпендикулярна права през точка** , **Сечение на два обекта**  и

Окръжност с център през точка , „преместваме“ селището D от другата страна на реката. **Скриваме** окръжността и правата. Използваме твърдението: „Най-късото разстояние между две точки е отсечката, която ги свързва“ и с инструмента **Сечение на**

два обекта  откриваме мястото на „моста”- М. Чрез еднаквостта на триъгълниците $\triangle DMF \cong \triangle D'MF$ и $\triangle DFE' \cong \triangle D'FE'$ и неравенството $CD' < CE' + E'D'$ за страните на $\triangle CD'F$ доказваме, че М е търсеното място за „моста”.

Отново се връщаме на точката D' , която ни помогна да решим задачата и на преобразуваните по този начин точки от равнината относно дадената права, което

преобразование се нарича **Осева симетрия** . По-късно отново се връщаме на чертежа, за да коментираме образа на отсечка и двойни елементи при осева симетрия.



Фигура 1

Накрая припомняме начина, по който построявахме графиката на функцията $y = |x|$, както и на $y = ax^2$, и отново намираме приложения на осев симетрии.

Когато от учениците е усвоено определението за **осева симетрия** и умението да построят образи и първообрази на точки и фигури при осева симетрия в тетрадките, е разумно да им покажем и да разрешим използването на динамичната среда GeoGebra и

инструмента **Осева симетрия**  за тази цел. Нека да им доставим удоволствието сами да откриват кога и как да прилагат геометричното преобразование, а построението да извършват рационално.

За любителите на билиярда и на математиката е интересна следната задача:

Задача 2. На билиардна маса има две топки. Да се определи: А) от кое място на една от страните на масата трябва да се отрази едната топка, така че след това да удари другата? Б) от кое място на една от страните на масата трябва да се отрази едната топка, така че след последователното отразяване от две от страните да удари другата? В) от кое място на една от страните на масата трябва да се отрази едната топка, така че след последователното отразяване от три от страните да удари другата?

Нека да направим модел на масата и топките. С инструмента **Отсечка с дадена дължина**



избираме двата върха на масата, а с **Перпендикулярна права през точка** 

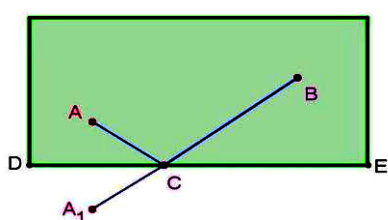
правите през две от страните на масата. Избираме третия връх с бутона **Точка** 

върху едната права и отново с **Отсечка с дадена дължина** , фиксираме четвъртия

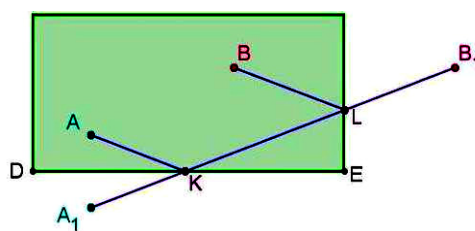
върх на масата. Маркираме „масата“ с инструмента **Многоъгълник** , за да можем да фиксираме „топките“ върху нея с инструмента **Точка** .

Искаме „топката“ A след отразяването от страната DE да удари „топката“ B (фиг.2). Анализираме ситуацията, припомняйки си закона от физиката „Ъгълът на падане е равен на ъгъла на отражение“. Достигахме до заключението, че отразеният лъч ще минава през образа на точката A при осева симетрия с ос DE , а падащият през образа на точката B при същата симетрия. Търсената точка е пресечна точка на отразяващата страна и правата, определена от едната точка и образа на другата точка, при симетрия с ос – страната.

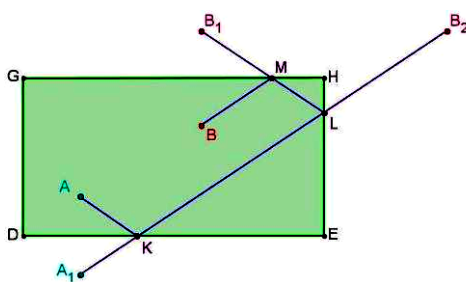
При две отразяващи страни (фиг. 3) се разглеждат две осев симетрии и съответно при три отражения – три осев симетрии (фиг.4).



Фигура 2



Фигура 3



Фигура 4

За въвеждане на преобразованията **Ротация** и **Транслация**, както и за изясняване на понятията **положителен и отрицателен ъгъл на въртене** разглеждаме следната задача, вдъхновена от задачата за хамаците [1]:

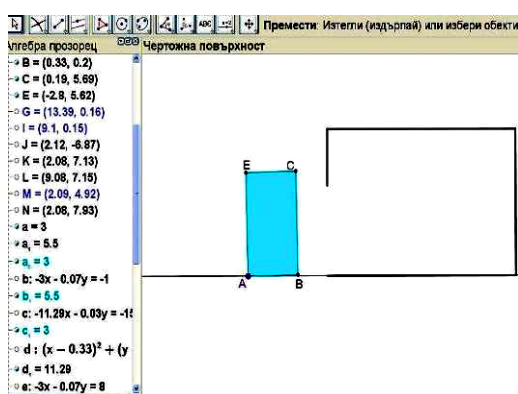
Задача 3. Старинен неразглобяем гардероб е поставен пред вратата на стая (фиг. 5), като височината на гардероба е по-голяма от височината на вратата, но по-малка от височината на стаята, а широчината и дължината му са по-малки съответно от широчината и височината на вратата. Съставете стратегия за внасянето на гардероба в стаята. Следете движенията, които извършва стената, съдържаща вратите му.

Демонстрираме преместването отначало на макети, като напомняме, че следим движението на вратите на гардероба. Коментираме началното преместване по „посока“ към вратата (фиг. 6) и на определено разстояние, т.е. на определена „дължина“, и си припомняме изученото по-рано понятие, което има посока и дължина – **вектор**. Такова преместване се нарича **Транслация** или **успоредно пренасяне** и се определя от (посока и дължина) вектор на транслация. Естествено е следващото предложение да е „завъртане“ (фиг. 7), като уточняваме **около** какво завъртаме, **в каква посока** и **на колко** градуса завъртаме. Информативно обясняваме, че това движение се нарича **Ротация** и се определя от три условия – център на ротация, посока на въртене и ъгъл на

завъртане. Следва внасяне в стаята (Фиг. 8) и „изправянето“ на гардероба (Фиг. 9 и 10), като обръщаме внимание на обратната посока на завъртане.

Предлагаме двумерен модел на разглежданата ситуация.

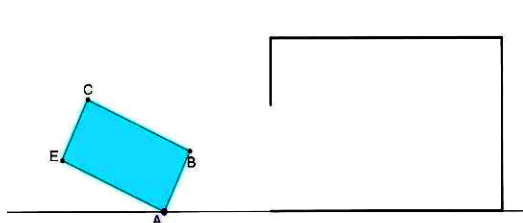
С помощта на инструментите **Премести** и **Завърти около точка** всеки ученик самостоятелно прилага съответните движения, като внимава гардеробът „да не минава през стените на стаята“.



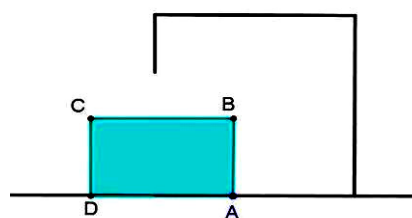
Фигура 5



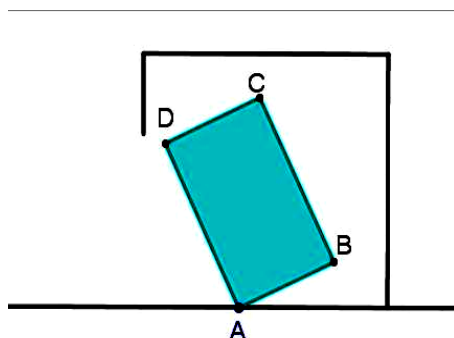
Фигура 6



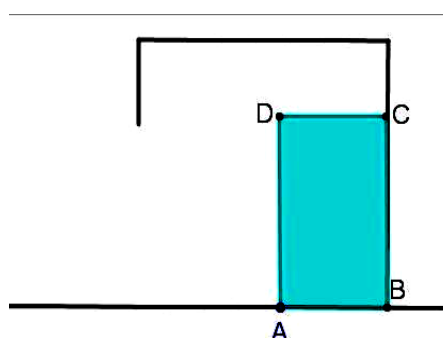
Фигура 7



Фигура 8



Фигура 9



Фигура 10

Когато преценим, че необходимите знания и умения, свързани с геометричното понятие **Ротация** са усвоени, можем да проверим до колко това е така с поставянето на няколко практически задачи.

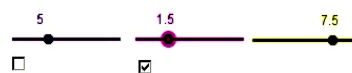
Задача 4. Семейство си купило кръгла маса с диаметър 150 см. Мъжът се чудел дали около масата ще има място за 12 стола с размери 50 см на 50 см, а жената – дали ще могат да се подредят на нея 12 чинии с диаметър 30 см, като има достатъчно място за приборите за хранене? В динамичната среда GeoGebra направете модел на задачата и експериментално намерете отговора на въпроса на семейството.

Чрез инструмента **Окръжност с център и радиус**  се създават моделите на маса с радиус 75 см и на чиния с радиус 15 см. На чертожната равнина не се виждат окръжности,

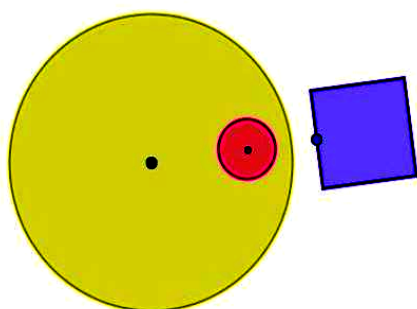
защото радиусите са големи. С инструмента **Намали чертожната повърхност**  моделите се появяват във видимата част на екрана Построяването на квадрата-„стол” е известно на учениците (Фиг. 11).

Коментират се предложенията за ротация с ъгъл на въртене $\alpha = \frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$ или $\alpha = -30^\circ$,

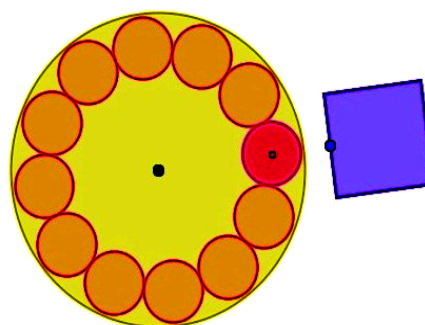
или ротация и централна симетрия. Отговорите варират от „малко е тясно, но може”, който е подредил само чиниите (фиг.12), до „не може”, който е подредил и столовете, които се застъпват (Фиг. 13). Отговорът е „не” и от елегантните решения „В кръгов сектор с централен ъгъл 30° не може да се постави такъв стол” (фиг.14) и „Такъв стол може да се постави само ако ъгълът на въртене е по-голям от 40° , следователно отговорът е „Не” (Фиг. 15).



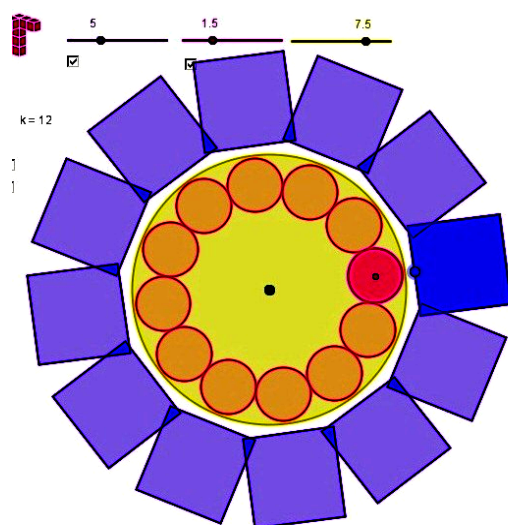
2



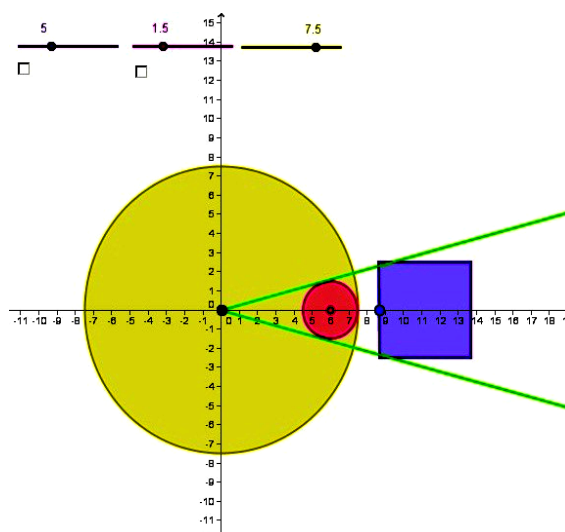
Фигура 11



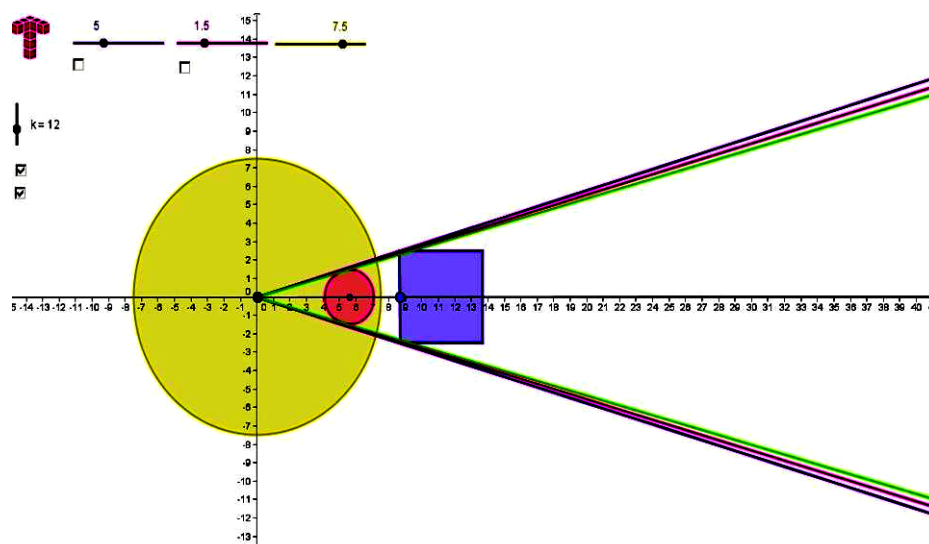
Фигура 12



Фигура 13



Фигура 14



Фигура 15

Литература:

1. Василева А., *Ако хамалите бяха математици и други екстрем(ал)ности*. Математика и информатика, бр. 1, 2011, с. 11-18.
2. Чехларова Т. Д., Димкова, Е. Сендова, *Въздушни следотърсачи с GeoGebra*, Математика и информатика, бр. 6, 2010, с. 3-13.