

# Може ли изучаването на стереометрия да бъде начин за забавление?

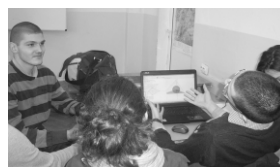
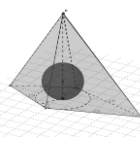
Даниела Петрова, Ангел Миланов

[dan\\_petrova@yahoo.com](mailto:dan_petrova@yahoo.com), [angel.milanov@gmail.com](mailto:angel.milanov@gmail.com)

91. НЕГ „Проф. К. Гълъбов”, София

## Резюме

*Вписани и описани тела - материал, за който практиката ми е доказала, че не е най-обичаният от учениците. Искях да го направя по-примамлив и реших, че начинът е да използвам 3D-геогейбра. Не ме уплаши това, че е  $\beta$ -версия. Запретнах ръкави и*



*започнах да се забавлявам с направата на интерактивни чертежи. Резултатите бяха интересни. Във всеки клас учениците се разпределиха в 5 отбора (разполагахме с 5 лаптопа) и всеки от тях избра тема за изследване. Времето за „откривателство” беше 2 учебни часа. След това всеки отбор докладваше пред класа.*

*Получиха се много интересни дискусии с често срещания в тях красив въпрос „Защо?”. Една от най-разгорещените беше по повод вписания в четириъгълна пирамида прав кръгов конус. Много ме зарадва и възклицанието: „Тук има някакви отношения!”. Това възклицание доведе до превъзходно подаване на идеи между участниците в отбора и между тях и класа. В някои случаи отбори обединиха усилията си в разглеждането на подобни ситуации (примерно: вписан прав кръгов конус и вписано кълбо).*

*За младите хора не представлява затруднение да изпробват дадена математическа ситуация в подходяща компютърна среда, за да добият по-ясна представа за нещо, което би било иначе абстракция за тях. Логическите връзки се изграждат по-бързо с дигитален модел, който е много гъвкав инструмент за онагледяване.*

*Докладите на отборите все още не са свършили и не сме започнали с решаването на задачите, но на мен вече ми е топло на душата. Радвам се на това, че накарах учениците да мислят в контекста на предизвикателна математическа ситуация. Бях изненадана, че много малко от тях използваха поставените насочващи въпроси и указания във файловете. Разбира се, имаше ученици, които се опитаха избягат от задачата си. Имах и проблеми от чисто техническо естество, и с работата с  $\beta$ -версията на GeoGebra, но искрено се забавлявах, защото и аз бях в ролята на изследовател. Надявам се, че след някоя седмица ще мога да си кажа, че не съм сбъркала с избора на този нетрадиционен начин за преподаване на стереометрия.*

## Ключови думи

изследователски подход, проект Fibonacci, GeoGebra, стереометрия, вписани и описани тела

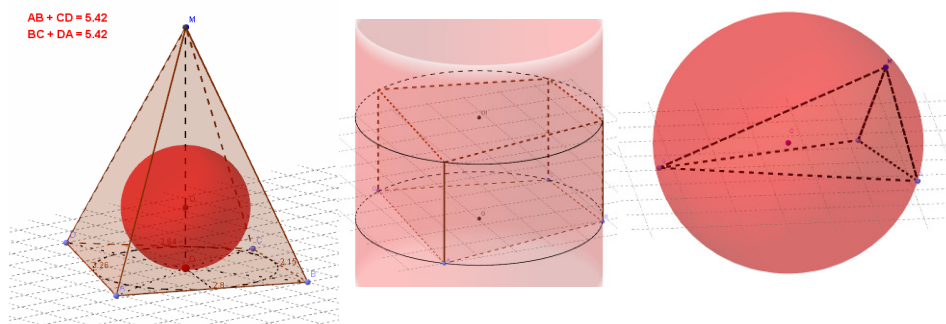
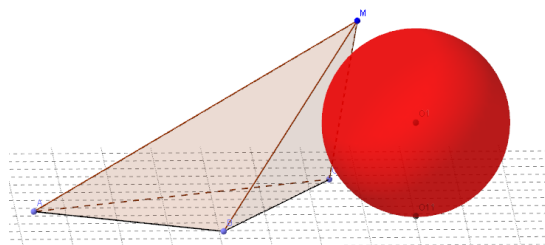
## Предистория

Вписани и описани тела. Материал, който практиката ми е доказала, че не е най-обичаният от учениците. Искях да го направя по-примамлив и реших, че начинът е да използвам динамична среда, в която чертежът може да се уголемява, смалява, да се върти и разглежда от всички страни. Лесно могат да бъдат добавени точки, отсечки, да бъдат измерени разстояния, големини на ъгли, лица на фигури. Това дава възможност да се открият зависимости, които иначе даваме наготово на учениците или откриваме с помощта на много чертане. В случая използвах 3D-геогейбра.

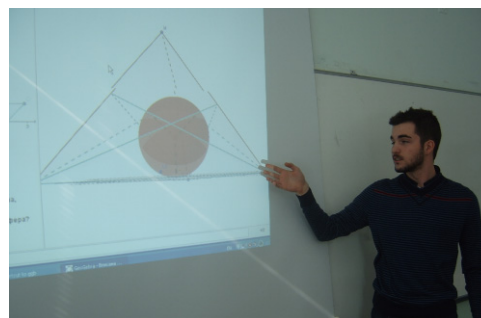
*За нещо различно щом ти си готов,  
прави го! И нека урокът ти нов  
да бъде по-свеж, по-разчупен, със смях!  
Дано да си кажеш след него „Успях!“.*

## Гледната точка на учителя

При подготовката за урока се чудех дали си струва отделеното време, защото работата с бета-версия понякога доста изнервя. Налагало ми се е в рамките на 1 час да затворя и отново да отворя няколко пъти работния прозорец, да рестартирам компютъра и да похабя доста нерви. Но през цялото време си казвах, че, ако издържа, ще потвърдя за пореден път мнението си, че излизането от традиционното е запомнящо се и дава добри резултати. Крепеше ме и чувството, че се забавлявам и детинската радост, когато успях да измисля начин да попълня и надхитря пропуските в недовършената версия на геогейбра. В един момент offline-версията спря да изпълнява командата Pyramid и реших да пробвам да създам пирамида по дадените ѝ върхове в online версията.



Опитът се оказа успешен и след това при подобни проблеми действах по същия начин. При построяването на ъглополовяща равнина при основните ръбове на триъгълна пирамида се наложи да се преборя и с един проблем, който доведе до интересна ситуация – кълбото, което трябваше да е вписано, в определени моменти ставаше външно-вписано, защото не можех да



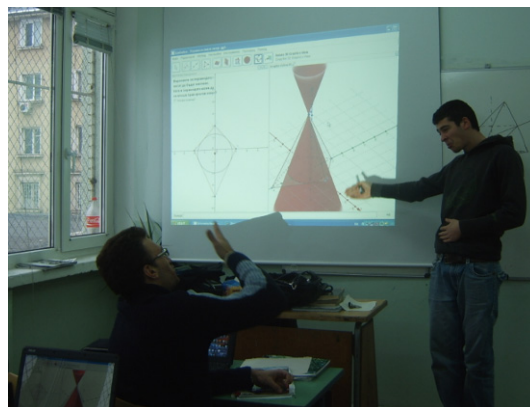
задържа ъглополовящата равнина между основата и околната стена в правилната посока. Имам и един проблем, който все още не съм изчистила – една и съща формула води в повечето случаи до правилното изписване на ъгъл с число, по-голямо от 90, а в един случай си стои като отрицателно число. Въпреки всички трудности, а може би и точно заради тях, ми беше интересно да направя чертежите. Възможността да разглеждам телата от всички страни помогна дори на мен да се справя по-лесно при съставянето на чертежите, когато „влизахме” в конус и кълбо.

Направих чертежи, с които онагледих вписването на цилиндър, конус и кълбо в пирамида и описването им около пирамида. Имаше и чертежи за вписване на цилиндър и кълбо в призма и описването на цилиндър и кълбо около призма. В училищния курс се разглеждат предимно прав кръгов цилиндър и прав кръгов конус. Това не ми попречи да направя един чертеж с наклонен конус, за да илюстрирам теоремата-признак за вписване на кълбо в пирамида в общия случай.

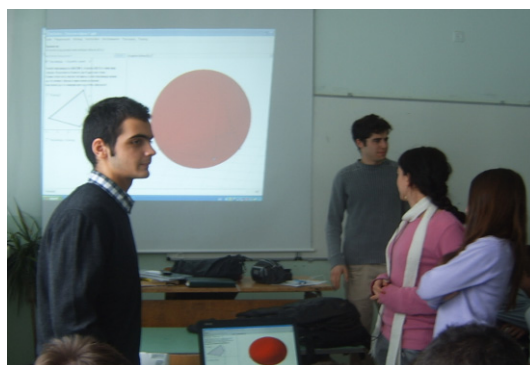
Решаването на задачи и следващата контролна работа ще покажат дали съм постигнала целта си. Искане ми се учениците да не се плашат при решаване на задачи с вписано кълбо и всякакви вписани едно в друго тела.

Училището ме подсигури с 5 лаптопа и стая с достатъчно контакти за тях.

Направих чертежите, пузнах ги в действие и с огромен интерес наблюдавах какво се случва.



Понякога и докладването може да е смешно



Отборът отговаря на въпроси

## Различните часове

Във всеки клас учениците се разпределиха в 5 отбора и всеки от тях избра тема за изследване. Всяка тема беше подсигурана с поне 2 динамични чертежа. Времето за „откривателство” беше 2 учебни часа. След това всеки отбор докладваше пред класа.



*Усмехнатите лица са доказателство, че можем да учим, забавлявайки се!*

Оказа се, че не е трябвало да си спестявам извеждането върху екрана на сбора от срещуположните ъгли на вписан в окръжност четириъгълник, както и сбора от страните на описания около окръжност четириъгълник. Нямаше клас, в който да не започнат сами да преправят четириъгълниците така, че да могат да ги контролират по желания начин. Това ме накара да направя въпросните допълнения за следващите часове.

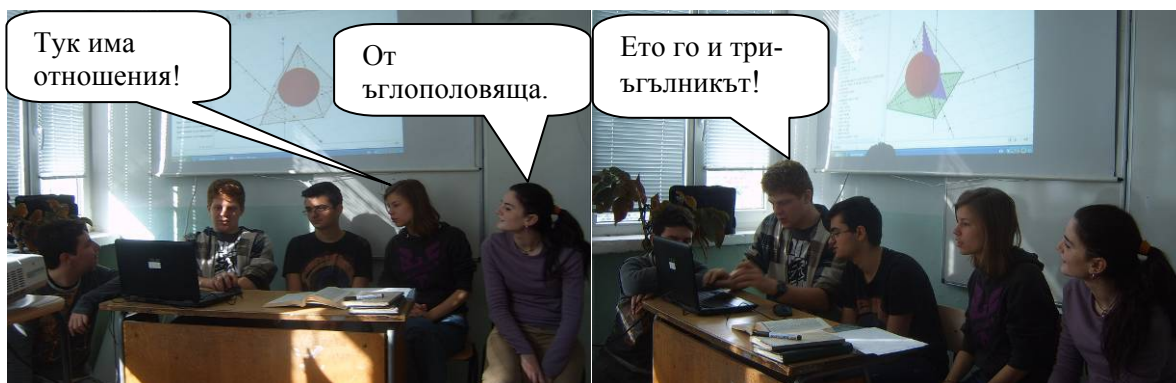
Мислех си, че учениците ще имат нужда от моята помощ по време на откриването на връзките между елементите в разглежданите чертежи. За да не се разкъсам между отборите, бях подготвила върху всеки чертеж достатъчно стъпки за подсказване в случай на необходимост. Бях изненадана, че много малко ученици използваха поставените насочващи въпроси и указания във файловете. Повечето дори не бяха забелязали, че има поставено на екрана мъничко копче за помощ. Въртяха чертежите, гледаха ги от всички страни, поставяха точки една над друга, за да постигнат желаното. Всички се стремяха да открият възможно повече закономерности в конструкциите си. И се забавляваха. Дори в един от класовете обявиха съревнование между отборите.

По време на отборното разглеждане на задачите и след това, при докладването пред класа, се получи много интересни дискусии с често срещания в тях красив въпрос „Защо?“. Една от най-разгорещените беше по повод вписания в четириъгълна пирамида прав кръгов конус. Стигнахме до разискване на дефиницията за конус в общия случай. Констатирахме факта, че ъгълът между оста на конуса и образуващите е постоянен в правия кръгов конус и се променя в наклонения. Говорихме и за това, че в геогебра конусът е определен по върха, оста си и ъгъла на въртене на образуващата. Споменахме коничните сечения и това ще е следващата тема за разискване с помощта на геогебра.

Наложи се повече да се застоявам при отборите, които имаха задачата за вписано в пирамида кълбо. В един от класовете, в резултат от поставен въпрос, показах на отбора цялата ъглополовяща равнина, а не само онази част от нея, която е между стените на пирамидата. След това те използваха същите стъпки, за да онагледят по-добре представянето си.

При докладване на отбор, който имаше задачата за вписано в пирамида кълбо, една от девойките възкликна: „Тук има някакви отношения!“. Това възклицание доведе до превъзходно подаване на идеи между участниците в отбора и между тях и класа. Другата девойка в отбора се сети, че търсеното отношение идва от свойството на ъглополовящата в триъгълник. Ученици от останалата част на класа подеха идеята и с

общи усилия търсеното отношение беше намерено. За да го онагледя, Ангел направи допълнение към чертежа, оцвети го и... аз бях на върха на щастието.



В някои случаи отбори обединиха усилията си в разискване на подобни ситуации (при вписан прав кръгов конус и вписано кълбо). Имаше и предположение за това, че върхът на наклонения конус, центърът на вписаното кълбо и единият фокус лежат на една права. Още в междучасието започнахме да проверяваме и въпросът остана за следващи дискусии. Имаше и спорове трябва ли пирамидата да е правилна, за да може да се впише в нея кълбо. Коментирахме аналогията при вписване на кръг в четириъгълник и кълбо в четириъгълна пирамида.

### Гледната точка на Ангел, един млад човек, който търси отговори, често ги намира сам и не се предава лесно:

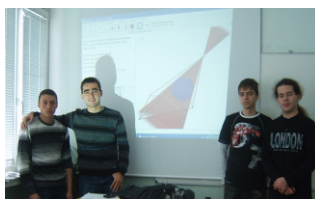
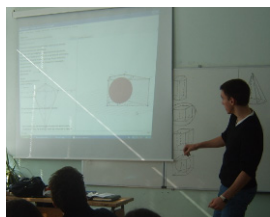
„Като ученик и млад човек харесвам новите и авангардни идеи. Смятам, че най-лесният начин за научаване е чрез наблюдение и осмисляне; бихме могли да се възползваме от нововъведенията в техниката, за да улесним този процес, вместо да чертаем на ръка. Освен това за младите хора не представлява затруднение да изпробват дадена математическа ситуация посредством подходяща компютърна среда, за да добият по-ясна представа за нещо, което би било иначе абстракция за тях. Логическите връзки се изграждат по-бързо с дигитален модел, който е много гъвкав инструмент за онагледяване.

Докато решавам домашно, понякога се възползвам от възможностите на геогейбра, за да достигна до отговора по-бързо. Друг път се наслаждавам на красотата на математиката, когато е пред очите ми, особено на геометрията. На мнение съм, че в България изобщо не изоставяме в областта на информатиката и така трябва да си остане. Напълно подкрепям учителите новатори и напредничавите методи на преподаване.“

### Плюсове и минуси

#### Минуси:

- Зависим от техниката (компютри, проектор), за да можем да я ползваме.
- В 3D-геогейбра все още няма готови инструменти за ъглополовяща равнина и възникват проблеми с командите, заради това, че версията е недовършена.
- Необходимо е много време за предварителна подготовка на урока.
- Недостатъчно е времето в часовете по математика – работата с геогейбра често губи повече време от преподаването по традиционен начин.
- Някои ученици се опитваха да не работят в часа по поставената задача, като пускаха игрички на компютъра. Други не се включваха в дискусиите на съотборниците си.



Доклад и записване на обобщение след него

След докладването

#### Плюсове:

- Излизаме от рамката на традиционния час по математика.
- Предизвикателство за мен – използвах елементи от аналитичната геометрия, за да претворя чертежите от главата си в геогебра.
- Работата с 3D-геогебра дава възможност чертежът да бъде разглеждан под произволен ъгъл и да бъде смаляван или увеличаван.
- Даваме възможност на учениците за творческа изява.
- Приучаване на работа в отбор.
- Красивите дискусии, които в традиционния час са рядко явление.

#### Вместо обобщение

Докладите на отборите все още не са свършили и не сме започнали с решаването на задачите, но на мен вече ми е топло на душата. Радвам се на това, че накарах учениците сами да преоткрият изучавания материал. Радвам се на това, че те не избягаха от мисленето и чух неочаквани за мен предположения, които предстои да проверим. Направи ми много добро впечатление, че доста отбори си бяха приготвили записки, за да не пропуснат нещо важно при докладването си. Един артистичен младеж даде отговор на сериозен въпрос с физиономия и поза на шоумен, с което внесе смях в дискусията. Радвам се, че имам и съмишленици в лицето на Ангел. Той има идеята да направи инструмент за по-лесно построяване на ъглополовяща равнина и да направи чертеж, с който да илюстрираме коничните сечения.

Разбира се, имаше и ученици, които искаха да избягат от задачата си – опитаха се да редят пасианси и да сърфират в интернет, след като, според тях, са приключили работата си. Имаше и няколко пасивни участници в отборите. Но това беше само една тъмна капка в морето от слънчеви емоции.

Радвам се, че с Ангел сме съмишленици. Направата на използваните в урока чертежи съвпадна с приключването на първия срок и нямаше как той да се включи по-активно в разработката им. Сега Ангел има идеята да направи инструмент за по-лесно построяване на ъглополовяща равнина и да направи чертеж, с който да илюстрираме коничните сечения.

През цялото време искрено се забавлявах и се радвам, че не се отказах от идеята си. Надявам се, че след някоя седмица (след контролната работа) ще мога да си кажа, че не съм сбъркала при решението си да преподавам стереометрия с помощта на динамичен софтуер.

#### Литература

1. Кендеров, П. *Иновации в математическото образование: европейските проекти InnoMathEd и Fibonacci*, Математика и математическо образование, Сборник доклади на 39. пролетна конференция на СМБ, 2010.