

От колелото към калоферската дантела – уъркшоп и още нещо...

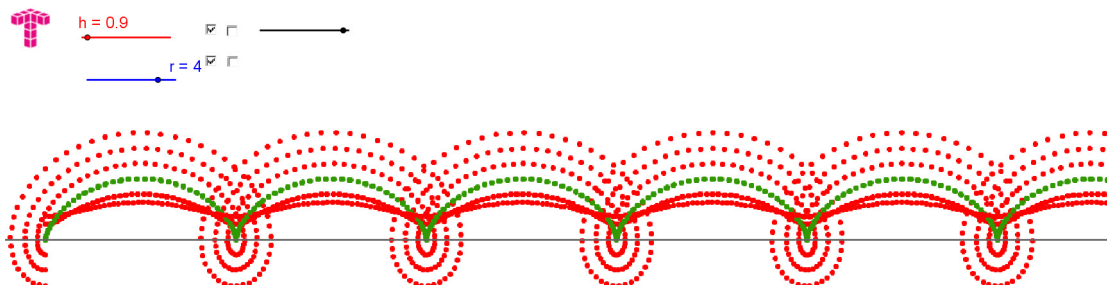
Румяна Ангелова

antika_rumi@abv.bg

Клуб „Процент и половина”, ПГИМ, Пазарджик

Резюме

След откриването на новата творческа година и обявяването на старта на изследователския проект по математика секцията от девети клас на клуб „Процент и половина” проведе уъркшоп „От колелото към калоферската дантела”. След като се запознах с основните идеи за моделиране на циклоида с помощта на компютърната среда Elisa [1], поставих на учениците задачата да реализират модела използвайки динамичния софтуер Geo Gebra. Те получаваха и изследваха пътя на точка, свързана с окръжността - неща, които не биха могли преди. Сравнявах, изказвах хипотези, обосновах защо трохоидата се нарича скъсена циклоида, когато $h < r$ и защо е удължена при $h > r$, където r е радиусът на окръжността, а h е разстоянието на точката до центъра на окръжността. След онлайн проучване занятието приключи с работа по екипи за извайване на „калоферска дантела”. Творческото жужене бе съпроводено с бурни възклицания на учудване, одобрение и удовлетворение от крайния резултат.



Ключови думи

динамичен софтуер, изследователски подход, геометрично място на точки

1. Увод

Конфуций и Аристотел са най-ранните привърженици на учене чрез действие, а Джон Дюи посочва, че образованието не е подготовка за живота, образованието е самият живот. С такъв тип активност и ангажираност учениците са вдъхновени да получат по-задълбочени познания по темите, които изучават. Когато формите на дейност се съчетаят и с постиженията на дигиталната образователна революция, се изграждат нерутинни интерактивни умения.

Важен момент в работата по математика е фокусиране вниманието на учителя върху възможността за повишаване мотивацията на учениците. Въпроса, който си задаваме е: *Как промяната в работата на учителя повлиява върху формиране на изследователски умения у учениците, необходими за 21 век?*

Идеята: Пътят на точката при движението на окръжността по права линия. Колелото и еволюцията – уъркшоп на секцията от 9 клас на клуб „Процент и половина”.

Опорни понятия: Геометрично място на точки (ГМТ), окръжност, крива линия

Цел на проекта: Да се повиши мотивацията на учениците, да се насърчи изследователският дух и любопитство чрез комбиниране на учебното съдържание по математика с аспекти от историята, заобикалящата ни среда и ежедневието.

За да се преодолеят техническите трудности, използваме GeoGebra за изследване на движението без плъзгане на окръжност по права линия.

2. Учейки се от реалния живот

„Задачи, взети от живота, а не схематично смятане; индивидуално обучение, а не затрупване с формули с еднакво за всички темпо. Това е реформата в обучението по математика [3]. Формата нарекохме *уъркшоп*, защото включва представяне на конкретни казуси и реална работа на участниците по време на събитието.

Да започнем с образ – колелото. В сравнение с текстовете, образите често предават по-ярко идеите. Затова те могат да служат като възможност за по-задълбочено изследване. Учителят умело води беседата: Изобретяването на колелото е пряко свързано с прогреса, дало е тласък на развитието на занаятите, на развитието на науката като цяло.

- *Коя е геометричната фигура, чиито свойства са изучени в осми клас – аналог на колелото?*
- *Окръжността*
- *А как дефинираме окръжност?*
- *Геометрично място на точки в равнината, равноотдалечени от една точка. Тази точка се нарича център на окръжността, а разстоянието – радиус.*
- *Наблюдавали сме движението на велосипедно колело със светлинен рефлектор върху него. Нарисувайте линията, която описва една точка от окръжността при търкаляне без плъзгане върху права линия.*

Учениците рисуват в дневниците си различни криви линии – някои рисуват окръжности.

- *Опишете вербално „пътя” на точката.*
- *Точката „се издига” нагоре, след това „се спуска” надолу.*
- *Колко най-високо?*
- *Колкото е диаметърът на окръжността.*
- *Колко най-ниско?*
- *Най-ниското положение е върху правата, върху която се „движи” окръжността и „не се връща назад”. Следователно не може нейният път да е окръжност.*
- *Опитайте още веднъж да си представите и да нарисувате „пътя” на точката.*

Учениците рисуват и вече има верни модели на линията.

- *Да видим каква крива описва точката от окръжност, която се търкаля по права линия.*

Учителят стартира динамичния файл и демонстрира чрез мултимедияен проектор линията, която генерира точка, неподвижно свързана с окръжност при търкаляне на окръжността по права линия. Обяснява, че тази крива линия се нарича *циклоида*. През всички етапи на развитие на математиката изучаването на кривите линии е представлявало интерес. Математиците през всички епохи са се опитвали да обобщят понятието, като на преден план изведат общите характеристики и свойства на кривите.

- *Какви криви линии сме „срещали” в часовете по математика?*
- *Крива затворена линия ... окръжност.*
- *Каква дефиниция можем да дадем за циклоидата?*
- *Като геометрични места на точка, неподвижно свързана с окръжността, когато тя се търкаля без плъзгане по права линия.*

Да разгледаме някои снимки от статията „Единство чрез многообразие“ [1].

По-нататък учителят обяснява методиката на изследване – той знае до какво може да достигне и поставя проблемната ситуация: *Как изглежда линията, която описва точка, вътрешна за колелото? Ако h е разстоянието на точката до центъра на окръжността (т. е. при $h < r$) „какво се случва“?*

- Точката прави по-малки отклонения нагоре и надолу и „изминава“ по-кратък път.
- А ако точката е външна за окръжността?
- При $h > r$, „размахът“ на линията е по-голям, „пътят на точката слиза“ под правата, по която се движи окръжността, и „се издига“ по-високо.
- Колко по-високо?
- На разстояние $h - r$ над нивото на циклоидата.

Основни дейности по проекта:	
Учител	Ученици
Задава въпрос: <i>Как изглежда линията, която описва точка от окръжността при търкалянето си без плъзгане по права линия?</i>	Рисуват криви линии, разсъждават, обясняват
Обяснява, демонстрира чрез динамичен софтуер	Наблюдават „търкалянето“ на колелото и „пътя“ на точки, свързани с окръжността
Запознава с готовия файл	Експериментират чрез динамичния софтуер при различни стойности на h и r
Насочва вниманието	Откриват зависимости между h и r и вида и формата на линиите
Води дискусията	Обясняват, описват и се аргументират, дефинират нови понятия
„Подава“ ключови думи	Извършват онлайн проучване
Консултира, поощрява	Работят в екипи, конструират „дантели“
Запознава с интерфейса на GeoGebra	Експортират снимки на създадените модели като картинка
Систематизира опита чрез въпроси и дискусия	Правят изводи и обобщения
Провокира с подходящи въпроси продължение и надстройване на темата	Дават идеи за нови проекти

Всеки участник работи индивидуално на компютър, опитва, построява циклоида, генерирана от точка върху окръжност с произволен радиус r .

- Нека сега разгледаме „пътя“ на точка от вътрешността на кръга (колелото), намираща се на разстояние h от центъра на окръжността.
- Значи на разстояние $h < r$. Готово – получаваме я!
- А сега да проследим „пътя“, когато точката е извън колелото.
- Трохоидата е крива, описвана от точка, неизменно свързана с окръжност – търкаляща се по права без плъзгане. Получава се когато кривата се описва от точка M , лежаща вън или вътре в окръжността с център O и радиус r .
- Как ще дефинираме трохоида?
- Геометрично място на точка от вътрешността (или извън колелото), когато имаме движение без хлъзгане по права.

3. От колелото към калоферската дантела, екипната работа и още нещо

„Издигането” и „снижаването” на точката вае красиви линии подобно на дантела. Пътят на точката е ту стръмен, ту полегат, като пътя на дантелата – с приливи и отливи. След проведеното онлайн проучване участниците в уъркшопа споделиха защо дантелата е уникална и привлекателна, разказаха, че тя е диалог между минало и настояще, ръцете на поколения българки я извайват с невероятно творческо въображение. Калоферската дантела сполучливо допълва блясъка на европейската совалкова дантела. Началото ѝ поставя будна калоферка, която през 1909 г. учи в класа за изработка на прочутата брюкселска дантела в Индустриалното училище в София, а когато се връща в родния град, вече е добавила свои мотиви към нея и успява да наложи свой стил, дал началото на калоферската дантела [4].



Можем да получим различни линии, като променяме по подходящ начин стойностите на h през определена стъпка спрямо r . Как да го осъществим в екип? Групирайте се по двама на компютър. Обмислете с колко линии ще „изградите” дантелата. Пресметнете при какви стойности на r и h ще се получат естетически конфигурации от линии, свързани с окръжността? Участниците оформят екипи по двама. Започва творческо жужене, пресмятане, изводи: h и r да са кратни на едно и също число. Получават дантели от седем, от осем линии.

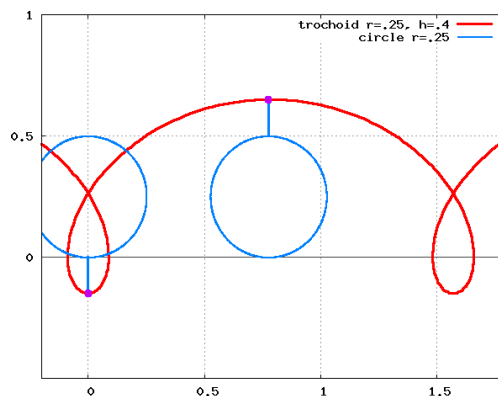
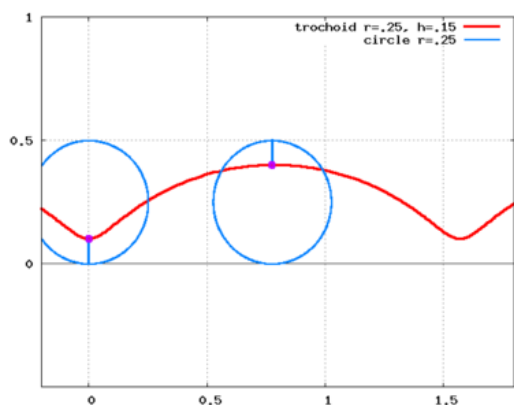
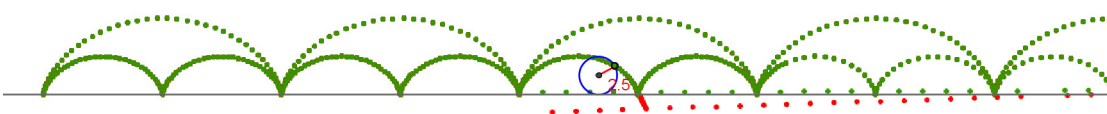
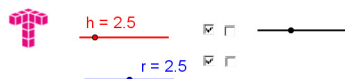
4. Изводи

Чрез анализа „колко най-високо” и „колко най-ниско”, учениците интуитивно достигат до идеята за най-голяма и най-малка стойност на функция. Ето изследването, което проведеха учениците:

- Линията, която описва точката от окръжността, е циклоида. Линията на точка в колелото е скъсена циклоида (трохоида), а на точката извън колелото – удължена циклоида.
- Дължината на един цикъл е равен на дължината на окръжността, защото той представлява едно нейно цяло търкулване.
- Когато се намали радиусът на окръжността два пъти, пътят, който изминава точката при едно завъртане се намалява два пъти и в един цикъл на циклоидата се „поместват” два цикъла от новата циклоида и т. н.
- Кривата е пътят, траекторията на движеща се точка, свързана с окръжността.
- Обща характеристика на тези три криви линии:
 - това е пътят на точки, свързани с окръжността;
 - при $h = r$ трохоида преминава в циклоида;
 - при $h > r$ трохоида се нарича „удължена циклоида”;
 - при $h < r$ трохоида се нарича „скъсена циклоида”.
- При умело конфигуриране на линиите се получава магическа феерия – аналог на калоферската дантела.

Учителят в ролята на медиатор провокира и поддържа диалога у ученика за явленията и тяхното обяснение, описание и изследване. Учителят знае до какво може да се достигне, поставя въпроси и създава проблемни ситуации: *Може ли да говорим за единство и многообразие при тези линии?* – единството се подчертава чрез анализ на общите характеристики на тези криви, многообразието – чрез изследване, начертаване на линиите, при разглеждане на различни стойности на r и h (при $h > r$, $h < r$).

Много важно е да се отбележи, че доказателство за единството е фактът, че при $h = r$ трохоидата преминава в циклоида [2].



В края на уъркшопа учителят прави обобщение, оценява постигнатите резултати и дава допълнителни примери за задачи със сродно математическо съдържание.

5. Резултати от проведения уъркшоп

След проведена анкета за резултати от уъркшопа установихме:

1. Всички ученици са задали въпроса: *Какъв е пътят на точката от окръжността при търкалянето ѝ по права линия?* на свои съученици и на своите родители и след това са използвали обяснението със светлинния рефлектор на велосипедното колело;
2. Голяма част от учениците (75%) са търсили самостоятелно в Интернет исторически сведения за изучаване на кривите и за видовете криви, свързани с окръжността;
3. Всички ученици „изработиха“ самостоятелно и изпратиха „дантели“;
4. Половината участници са търсили материали за калоферската дантела в Интернет.

6. Перспективи

Работата по изследователския проект ще продължи в следните направления: разглеждане и изследване на пътя на фиксирана върху окръжност точка при търкаляне без плъзгане на окръжността по окръжност вътрешно и външно:

- изучаване на геометрични места на точки чрез динамичен софтуер и
- систематизиране на задачи за тях от реалния живот.

7. Заключение

Динамичният софтуер GeoGebra е иновативна учебна среда, която провокира и мотивира учащите за задълбочени изследвания. След проведения уъркшоп всички ученици споделиха, че имат нужда от повече приложни изследователски задачи, от анализи, а не от механични изчисления. Те определиха математиката като експериментална наука, свързана с реалния живот. Чрез такива наблюдения и практики у учениците се формира философско отношение към заобикалящата ни действителност относно единството и многообразието на явления, повишава се мотивацията им и се изграждат нерутинни интерактивни умения.

Литература

1. Boytchev. P. *Unity via diversity*. Meeting in mathematics. 2008. p.81-98
2. *Циклоида*, <http://en.wikipedia.org/wiki/Cycloid>, 21-11-2012
3. Баптист, П., К. Милер, Д. Рааб. *Към нов подход в математическото образование*. http://www.math.bas.bg/omi/Fibonacci/docs/SINUS_Bg-ver4.pdf
4. *Trochoid*, <http://en.wikipedia.org/wiki/Trochoid>, 21-11-2012
5. *Калоферска дантела*
<http://handmade-bg.com/wp-content/uploads/2010/04/kal6.jpg>, 21-11-2012