

Моят опит в изследователския подход в часовете по математика – 12. клас

Стелиана Атанасова

steliana.atanasova@gmail.com

Училище 119 СОУ „Акад. Михаил Арнаудов“, гр. София

Резюме

Задачите за геометрични места от точки са много удобни за работа с динамичен софтуер. Те съдържат два етапа: определяне вида на геометричното място и доказателство на „откритото“ геометрично място. В първия етап е много полезно използване на динамичен софтуер, особено за по-сложни геометрични места, за които са необходими голям брой експерименти, за да се опознае формата на ГМТ. В този смисъл изучаването на обекта е сходно с експерименталната работа във всеки дял на науката. Така компютърът става силен инструмент за изследователска дейност. Примери за това споделяме в настоящата статия

Ключови думи

Геометрични места, геометрични орнаменти, експерименти с динамични конструкции

Задачите за геометрични места изразяват движение – нещо рядко срещано в училищния курс по математика. На екрана на компютъра може да се наблюдава *динамиката на образуване* на геометричното място, да се разбере сложният (в някои задачи) начин на натрупване на точките в ГМТ.

В тези задачи много често видът на геометричното място зависи от точния избор на данните в условието. В този смисъл една незначителна промяна на входните данни води до изменение на вида и формата на геометричното място, което позволява да се *съставят нови задачи*, близки до условието на дадената, но с различен отговор.

Ето условието на задачата, която е крайна цел на експеримента:

Да се намери геометричното място от точки, вътрешни за правилен петоъгълник, които са среди на не по-малко от три отсечки с краища върху страните на петоъгълника [1].

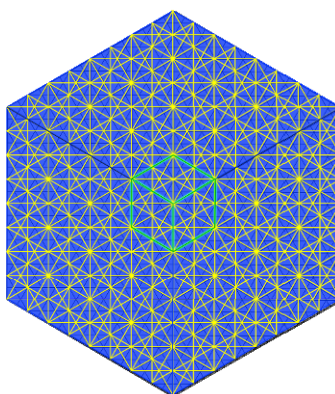
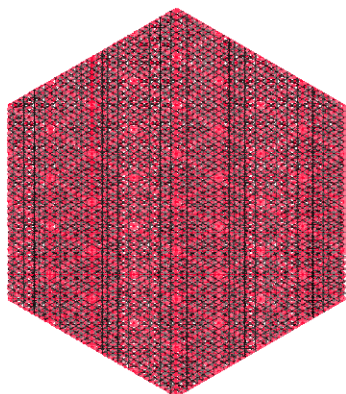
Ще споделя, че експериментът започна още миналата година. Поставих задача на учениците да разработят на групи теми от учебния материал по математика. Беше в края на годината и вече бях запознала много класове с възможностите на динамичната среда *GeoGebra* [2]. Така на двама от тях – Станислава Кичукова и Красимир Алексиев им хареса демонстрацията на теоремата на Вариньон за средите на четириъгълник. Другите ученици не се запалиха по проектите, макар че в часовете, в които работеха на компютър им беше много интересно. Е, все пак очаквах края на учебната година.

Тогава реших да разбудя духовете на двамата ентузиаста и започнах да ги провокирам с различни проблеми, свързани със средна отсечка. По-долу в изложението ще покажа част от техния проект, който беше демонстриран на националната конференция на проект *Fibonacci* – част от този проект са Задача 1 и Задача 2 в изложението.

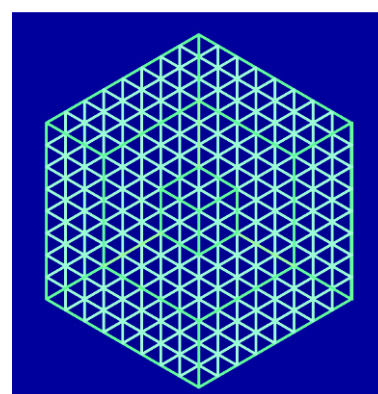
Така се досетих за дипломната ни работа с Таня Славчева, на която научен ръководител ни бе доц. Иван Тонов. И насочих Станислава и Красимир към изследователска дейност в задачи от геометрични места от точки. И двамата се справиха отлично, а това им помогна

да представят труда си пред екипа на *Фибоначи* на семинара през юни 2011 г. и да споделят своя труд на работна среща на *Юнеско* за *Иновационни технологии в обучението*, която се проведе в страната ни [3, 4].

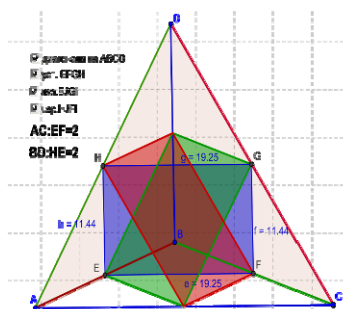
Още по-важно е, че с тези задачи се справиха и всички техни съученици тази година, малко преди коледната ваканция, когато ми се удаде възможност да замествам няколко часа учителя им по информатика. Не вярвах, че така ще ги увлека в една сериозна конкурсна задача, но се получи прекрасно. А двама от тях – Михаил-Богдан Янов и Кристиан Петров, се увлякоха дотам, че след училище в продължение на месеци измисляха и сътворяваха интересни геометрични орнаменти. И ги носеха да се похвалят, дори направиха плакати за домовете си.



Орнаменти на Михаил-Богдан



Орнамент на Кристиан

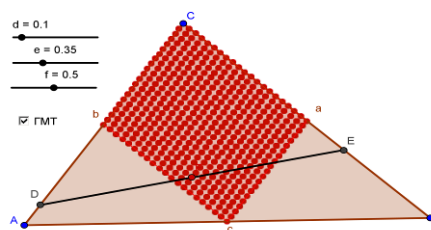
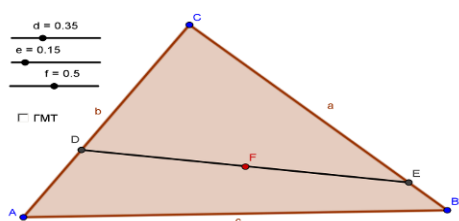


Експеримент на Красимир

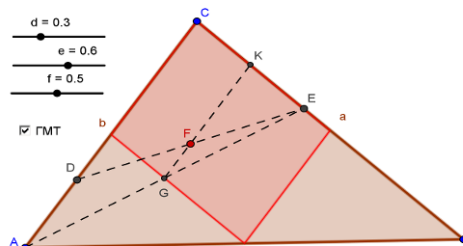
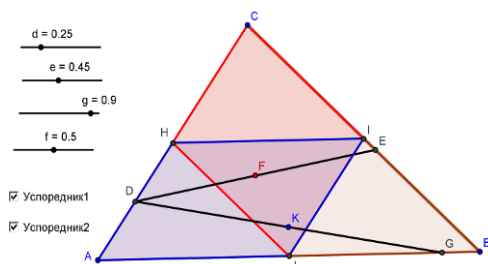
Красимир Алексиев и Станислава Кичукова от 12^a клас вече бяха изследвали геометричното място от точки от Задача 1 и Задача 2, описани по-долу, когато взеха участие в семинар на *Фибоначи* през юни 2011 г., където ги демонстрираха [3]. Към Задача 2 Станислава изследва ГМТ на точки с различни отношения, а Красимир достигна в експериментите си до завидна ситуация за неизпъкнал четириъгълник – и задача от учебника им за 11. клас – равнина, минаваща през средите на два срещуположни кръстосани ръба на триъгълна пирамида и успоредна на друга двойка срещуположни ръбове. На чертежа са изобразени и трите равнини, които притежават това свойство.

За да достигнем до основната задача започваме с две помощни задачи:

Задача 1. Да се намери геометричното място от точки, които са среди на всички отсечки с краища върху две от страните на триъгълник.



Точка F е среда на отсечка DE с краища върху страните AC и BC съответно. Промяната на положението на D и E се реализира с помощта на плъзгачи d и e . Геометричното място от търсените среди е успоредник с върхове средите на трите страни и общия връх за двете отсечки и всички вътрешни точки за успоредника.

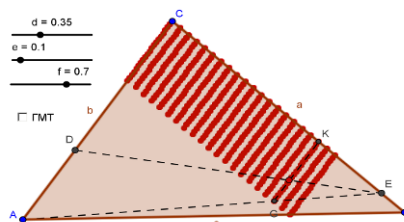
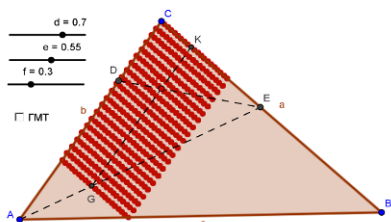


Наистина, нека F е вътрешна точка за успоредника и GK минава през F и е успоредна на AC . Свързваме A с G и пресичаме с BC в E . Свързваме E с F и пресичаме с AC в точка D . Точка G е среда на AE , защото лежи на средна отсечка. От това, че GF е успоредна на AD , следва, че F е среда на DE с краища върху страните AC и BC .

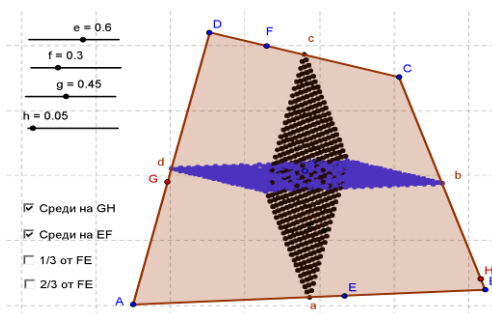
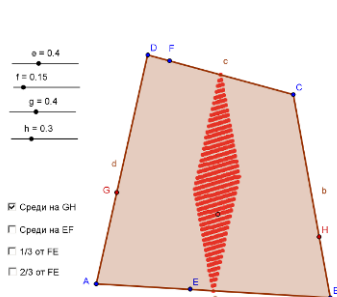
Да провокираме изследване на геометричното място от точки, които са среди едновременно на две отсечки, с краища върху страните на триъгълника. Добре е да използваме нов плъзгач g за средата K на отсечката DG .

Полученото геометрично място от точки е триъгълник с върхове средите на страните му и всички негови вътрешни точки.

Ученикът е любознателен по природа – веднага започва изследователска дейност (поне така постъпи Станислава - въведе нов плъзгач f за отношение, в което точка F дели отсечка DE). Отговорът не закъсня – геометричното място от точки отново е успоредник. И доказателството не я затрудни – използва теорема на Талес.

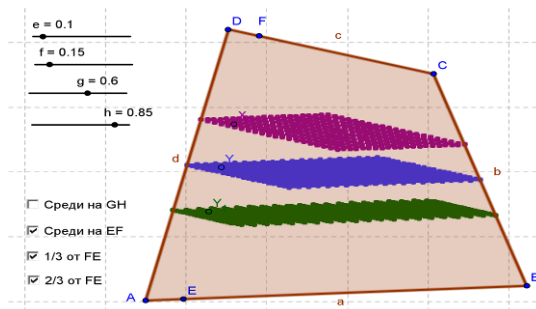
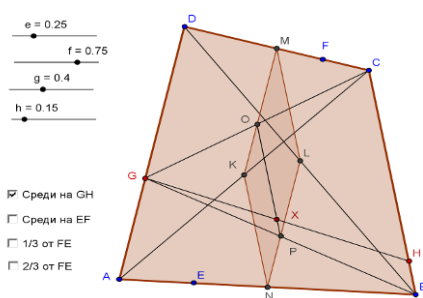


Задача 2. Да се намери геометричното място от точки, които са среди на всички отсечки с краища върху две срещуположни страни на изпъкнал четириъгълник.



Ако вземем средите на отсечките с краища само върху AD и BC , се получава успоредник с върхове средите на другите две страни и средите на диагоналите и всички неговите вътрешни точки. Разбира се, в частния случай, в който AD е успоредна на BC , или ако даденият четириъгълник е успоредник, ще получим отсечка, с краища средите на другите две срещуположни страни. Аналогичен е резултатът, ако изследваме средите за другите две срещуположни страни.

Това ни дава основание да съставим нова задача, а именно – за геометричното място от точки, които са среди едновременно на две отсечки с краища върху срещуположни страни на изпъкналият четириъгълник. Резултатът е очевиден – това е успоредникът, който е сечение на двата успоредника от предишната Задача 2 и всички негови вътрешни точки.



Кратко доказателство на Задача 2:

Нека G е произволна точка от AD . Пресичаме GC и GB съответно с KM и LN в точки O и P . Тогава OP е средна отсечка и щом H описва BC , то X ще описва OP .

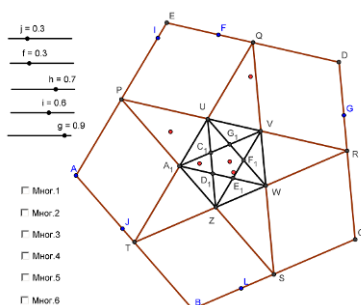
Обратно: ако X е от вътрешността на успоредника $KNLM$, през X построяваме OP , успоредна на KN . Но X е среда, следователно O и P са среди.

Нещо повече, защо да не изследваме геометричното място не от средите в Задача 2, а от точки, делящи отсечките в други отношения? Идеята бе отново на Станислава и тя я реализира за минута – въведе още един плъзгач. Това е естественият въпрос, който може да си зададе всеки ученик. А резултатите са аналогични – това отново са успоредници и техните вътрешни точки. Доказателството се извършва отново с теореми на Талес.

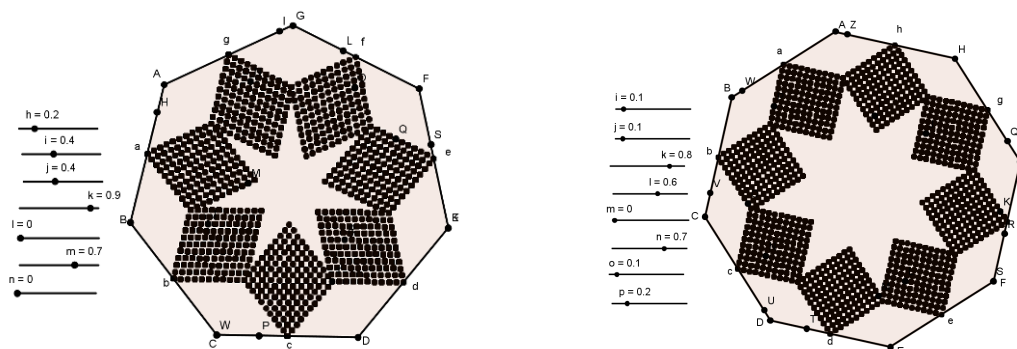
Забележка: Ако изпъкналият четириъгълник е успоредник или трапец, търсеното геометрично място се изражда в отсечка, което се доказва с елементарни разсъждения.

Дали е лесно да провокираме ученика да експериментира само с линия и пергел? Естествено, че не – или поне не всеки ученик. Докато в подходяща динамична среда не е нужно всеки път да ги насочваме към открития – те сами предлагат нови експерименти.

Но все пак да се върнем на основната задача.



Станислава продължи да изследва за седмоъгълник и осмоъгълник, и направи извод, че очевидно няма точки с желаното свойство.



Това са само част от експериментите, които сме провели през учебната година. Методът на геометричните места от точки бе използван и в редовните часове по математика – в 12. и 11. клас, профилирано обучение. Така например елипса, хипербола и парабола бяха успешно реализирани от учениците с компютърната среда *GeoGebra*, както и още няколко задачи в този дял. Особено ценен в това отношение и споделеният опит на колеги в проект *Fibonacci* [5].

4. Заключение

В заключение ще отбележа, че в нашето училище използваме компютъра за много и разнообразни цели. Учителката по информационни технологии – Николина Георгиева запознава ученици от 5. и 6. клас с компютърната среда *GeoGebra*, а учителката по математика на 5. и 6. клас – Светлана Илионова използва много често диска, който ни предостави екипът на проект *Fibonacci* на Националната конференция през декември, 2011 в часовете си и е много благодарна на създателите на динамичните ресурси по проекта [6].

За мен не е трудно да си отговоря на въпроса „Има ли полза от компютъра в часовете по математика?“ Да, особено ако е в изследователски стил!

Литература

1. Списание „Математика в школе”, кн. 2, 1986 г., №2959
2. Димова, Д. *Учи и преподавай математика с GeoGebra* – изд. „Везни – 4”, 2012, ISBN 9789549977509
3. Chehlarova, T. *If only I had such a math teacher...* In: Re-Designing Institutional Policies and Practices to Enhance the Quality of Education through Innovative Use of Digital Technologies - Unesco International Workshop Sofia, State University of Library studies and Information technologies. 2012. pp.135-140 ISBN 978-954-2946-19-9
4. Kenderov, P., E. Sendova. *Towards enhancing the inquiry based mathematics education*. In: Re-Designing Institutional Policies and Practices to Enhance the Quality of Education through Innovative Use of Digital Technologies - Unesco International Workshop Sofia, State University of Library studies and Information technologies. 2012. pp.56-70 ISBN 978-954-2946-19-9
5. Кокинова, С. – *Скок в неизвестното*, Математика и информатика, кн. 5 с. 13-16
6. Проект *Fibonacci* <http://www.math.bas.bg/omi/Fibonacci/archive.htm>, 1.02.2013