

## Задачи с дроби в стил Ешер

Тони Чехларова

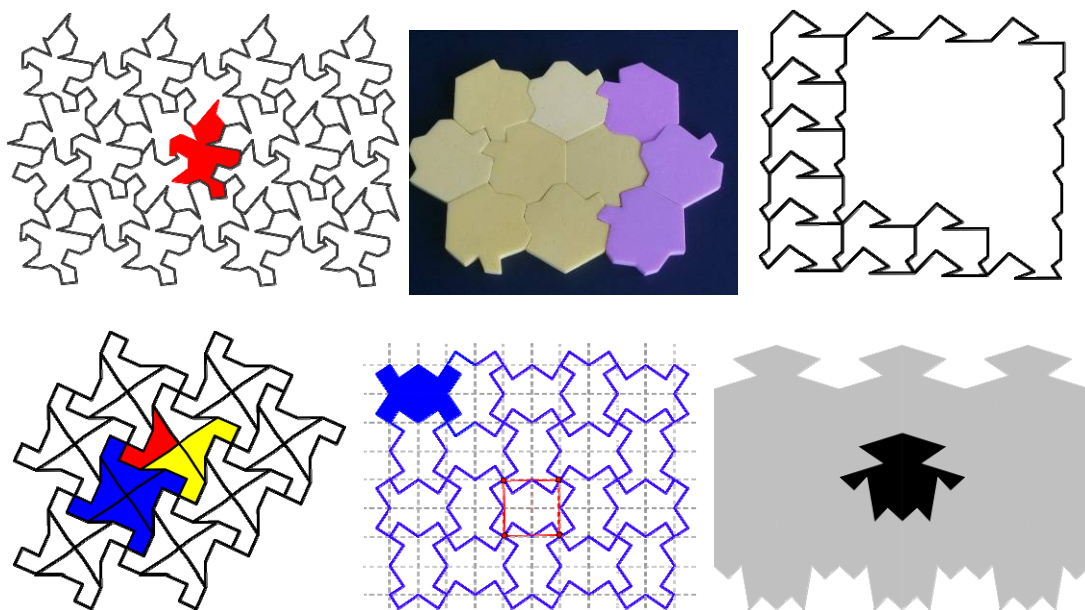
toni.chehlarova@gmail.com

ИМИ-БАН

### Резюме

Част от творчеството на холандския художник Ешер е свързано със създаване на фигури, покриващи равнината. Тези фигури, които ще наричаме паркетирани плочки, и композиции с тях, са естествена основа за задачи, подпомагащи формирането на умения за използване на обикновени дроби в нови ситуации.

Представяме някои идеи за съставяне на задачи с дроби в стил Ешер и дейности на учениците при решаването им.



Фиг. Композиции за задачи с дроби в стил Ешер

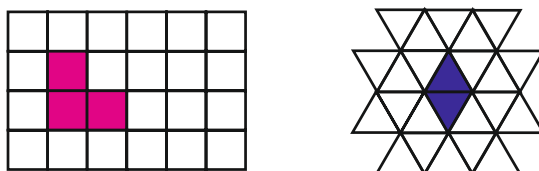
Посочваме някои средства за преодоляване на трудностите в процеса на решаване, включително и с използване на специализиран софтуер.

### Ключови думи

изследователски подход, динамичен софтуер, обикновени дроби, паркетирани , изкуство

## 1. Увод

За преодоляване на трудности при изучаване на обикновени дроби най-често те се онагледяват чрез разделяне на торта(и) или шоколад(и) на еднакви части. Фаворити като единични елементи при създаване на фигури в системите задачи с дроби са квадратът и равностранният триъгълник, чрез които ясно се визуализира разделянето на обект на равни части. Две типични фигури от задачи за представяне на оцветена част с обикновена дроб са показани на Фиг.1.



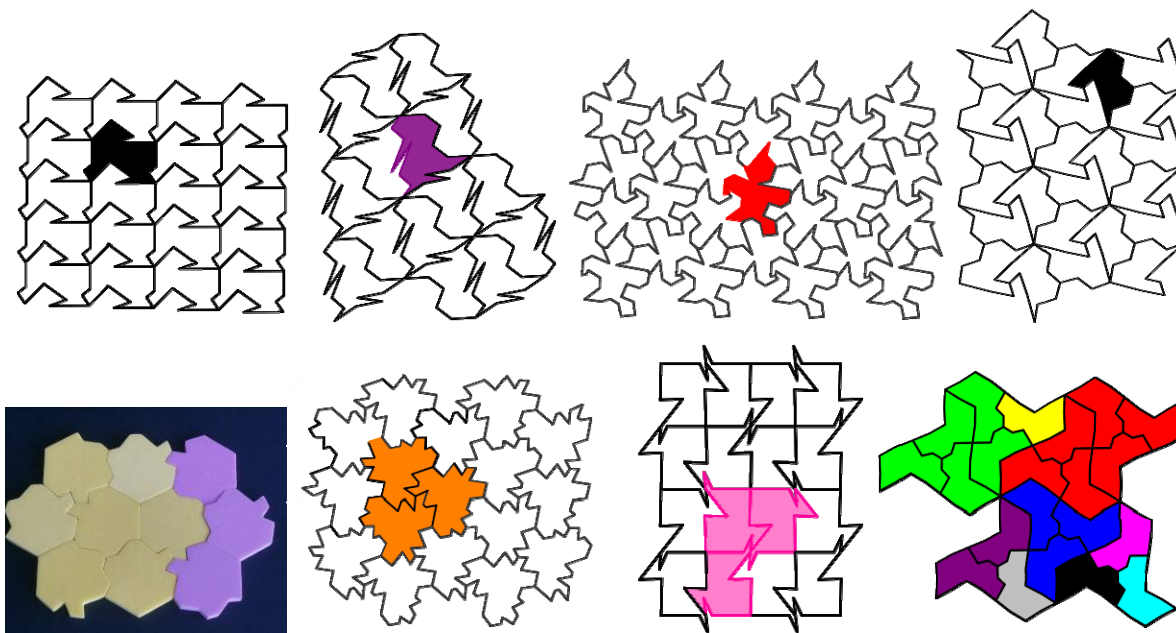
Фиг. 1. Типични фигури в задачи с обикновени дроби

Има разработени динамични среди, които улесняват изследванията, преоткриването на свойства на дробите и действията с тях, осигуряват онагледяване на дроби и решения на задачи с тях [1].

## 2. Паркетиращи плочки

Част от творчеството на холандския художник Ешер е свързано със създаване на фигури, покриващи равнината. Тези фигури, които ще наричаме *паркетиращи плочки*, и композиции с тях, са естествена основа за задачи, подпомагащи разбирането и формирането на умения за използване на обикновени дроби в нови ситуации. Когато в композицията са дадени контурите на паркетиращите плочки (Фиг.2), учениците трябва да:

- съобразят, че елементите, от които е изградена тя, са еднакви, и тъй като могат да покрият равнината, са паркетиращи плочки;
- намерят броя на оцветените паркетиращи плочки;
- намерят броя на всички паркетиращи плочки;
- представят оцветената част с обикновена дроб.



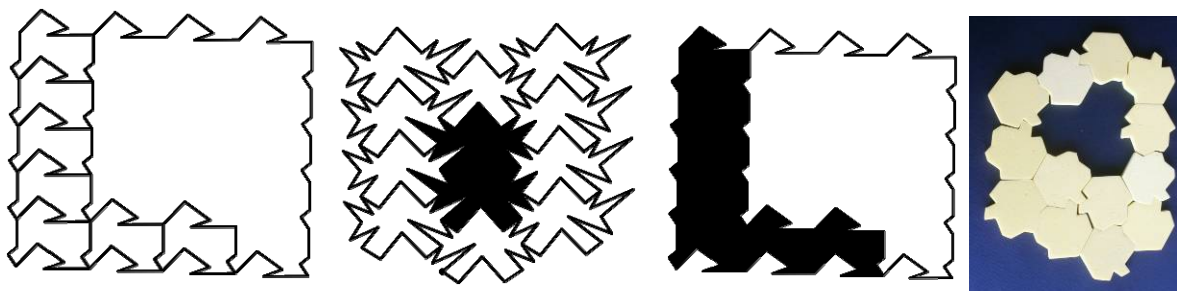
Фиг. 2. Композиции с контури на паркетиращите плочки

При работа с материални паркетирани плочки е естествено те да се наложат една върху друга и така да се прецени еднаквостта им.

Ако композицията е изградена само с използване на трансляция, учениците бързо съобразяват, че фигурите са еднакви. При използването на ротация (в частност – на централна симетрия) или осева симетрия, макар че интуитивно има ориентиране към еднаквост, трудно е „виждането“ или описанието на съответните еднакви елементи. Често се поставят символи, например стрелки във фигурите или се правят частични запълвания на части от нея, за да се изясни еднаквостта и подредбата.

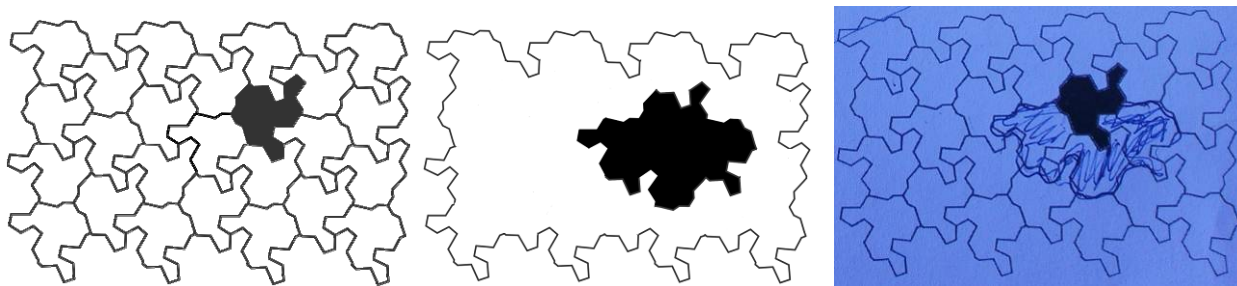
При необходимост може да се изреже плочка и демонстрира с налагане получаването на композицията. Когато задачата се задава на електронен носител, има и други възможности, които използваният софтуер предоставя за визуализация на еднаквостта на плочките.

Когато контурите са ясни, преброяването не е проблем и обикновено се търсят рационални начини за преброяване като групиране, умножение, използване на свойства на събирането, допълване и съответно изваждане. Когато не са ясни част от контурите, задачата значително се усложнява. На Фиг. 3 са показани примери, в които са дадени контурите на затъмнените паркетирани плочки; контурите на незатъмнените паркетирани плочки, не са известни контури на паркетирани плочки.



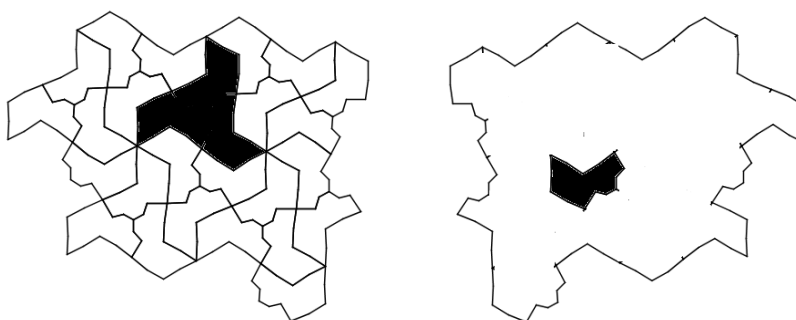
Фиг. 3. Композиции с липсващи контури на паркетирани плочки

В някои случаи подредбата на задачите може да подпомогне решаването. Никой от изследваните ученици не разпозна контура на втория пример на фиг.4, макар непосредствено преди това е решавал първия пример.



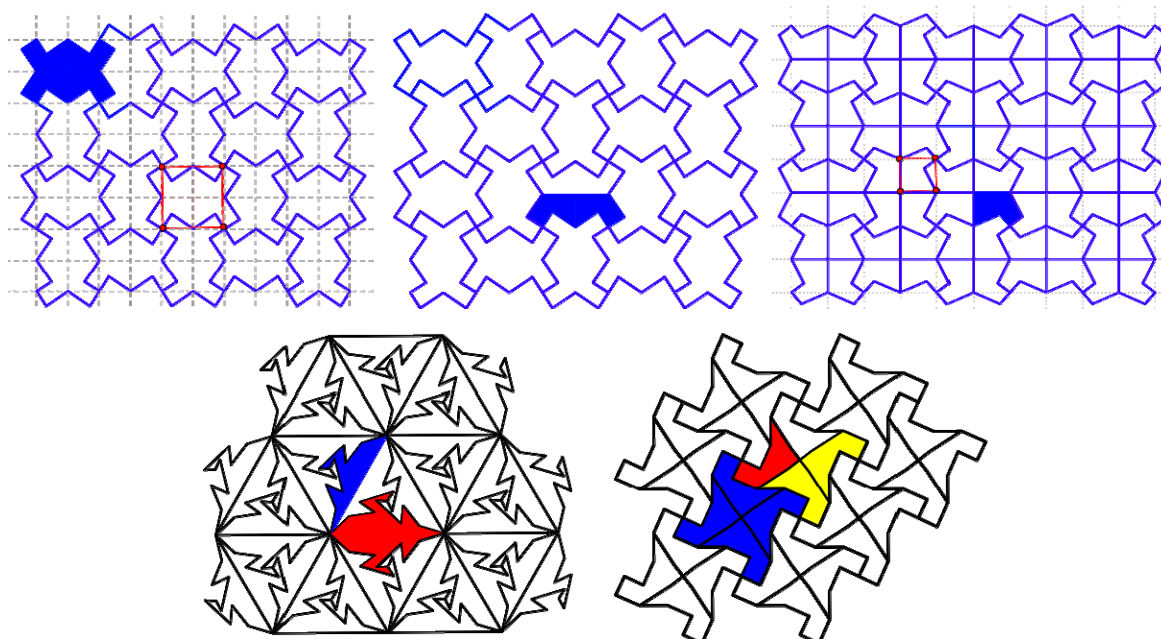
Фиг. 4. Подредбата на задачите

След помощта, насочваща към сравняване на двете фигури, по-голямата част от учениците започнаха да разделят тъмната част с цел установяване на броя на паркетирани плочки. а е по-удобно да се ползва предната фигура и чрез оцветяване да се получи „затъмненото петно“. Използването само на една такава подредба на примери доведе до системно разпознаване на контур и използване на изследвана вече композиция, т.е. използване на аналогията в този аспект като метод. Така всички видяха композициите във Фиг. 5 като симетрични и използваха получен вече резултат за решаване на следващ проблем.



Фиг. 5. Контурът

Понякога изборът на паркетираща плочка не е еднозначен. Такива са примерите със симетричните фигури на Фиг. 6.

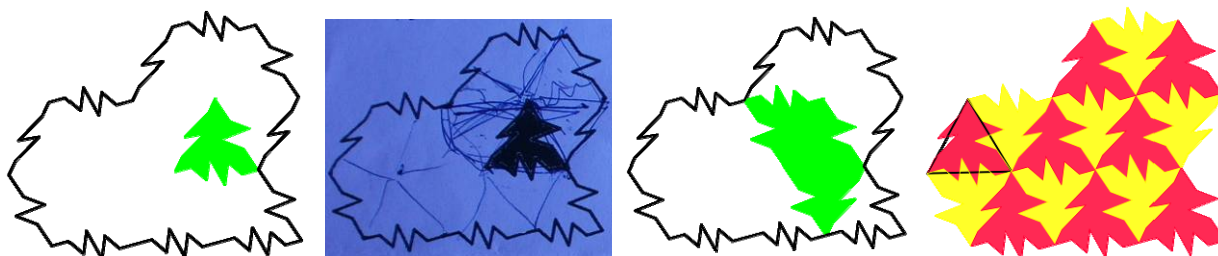


Фиг. 6 Варианти на избор на паркетираща плочка в композиция

Ясно е, че тук се проявява основното свойство на обикновените дроби. Синята част в последната композиция на Фиг.6 може да се изрази например като  $\frac{1}{9} = \frac{2}{18} = \frac{4}{36}$ , според избора на паркетираща плочка.

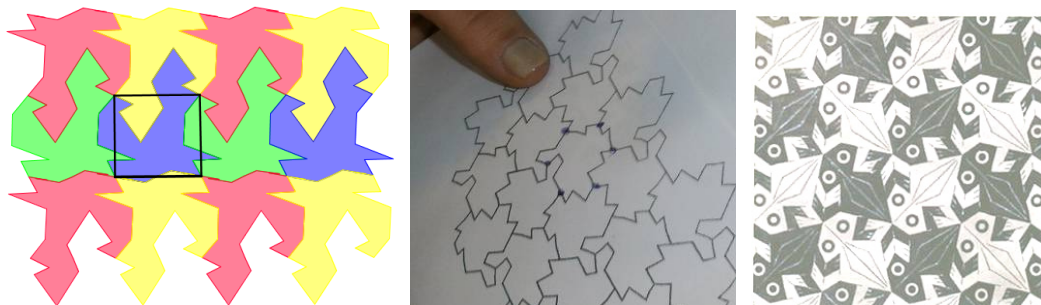
Оцветяването с различни цветове е подходящо за съставяне на задачи за събиране, изваждане или сравняване на обикновени дроби.

Ключов момент може да бъде откриването на фигурата, от която е започнало създаването на паркетиращата плочка (стартова фигура).



Фиг. 7. Използване на стартова фигура от ученици

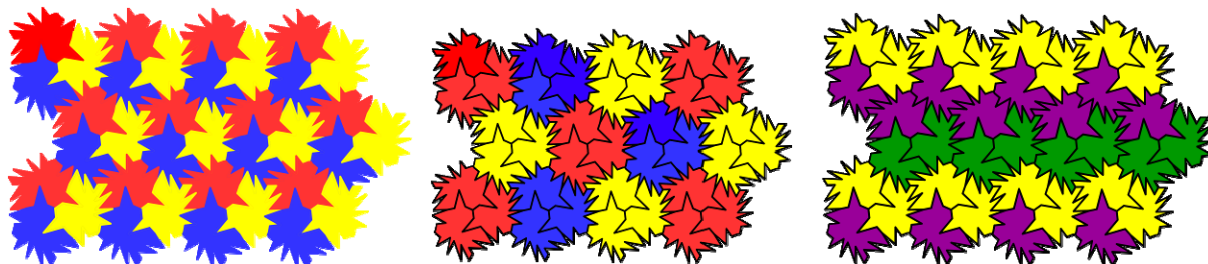
При откриване на стартова фигура съществени са точките, в които се срещат няколко паркетирани плочки.



Фиг. 8. Откриване на стартова фигура в композиция

С решаването на такива задачи в стил Ешер се цели не само прилагане на знания за дробни в нови условия. Очаква се учениците да развият наблюдателността, умение за разкриване на закономерности, за използване на свойства на числата и действията с тях, на симетрията, на лицето. Осигуряват се натрупвания и интуитивно разбиране и използване на еднаквости.

Подходящо е предварително да са извършвали оцветяване по различни начини на подходящи композиции – тогава по-лесно откриват различни закономерности в паркета.



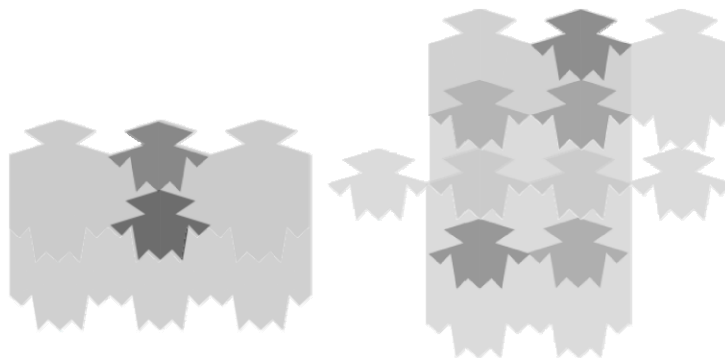
Фиг. 9. Разнообразие в оцветяването

Усложняването на задачите с дробни в стил Ешер може да се постигне по различни начини – чрез композициите (Фиг.10) или чрез текстовете.



Фиг. 10. Композиции за задачи с повишена сложност

При електронно задаване на задачата учениците използват други средства за решаване. При работа с *GeoGebra* единичната фигура може да се запише като картина, да се вмъкне във файла многократно и да се използва като паркетирална плочка. Понякога е удобно така да се работи и с цялата композиция (виж Фиг. 11). Друг начин е да се намери проста фигура „например пораждащата“, и с нея да се извърши преброяването.



Фиг. 11. Използване на GeoGebra като средство

Следващите предизвикателства са задачи с обикновени дроби в стил Ешер, когато се използват две или повече плочки, или неевклидова геометрия. Съставянето на такива математически задачи от ученици е свързано с творчески елемент и в областта на изобразителното изкуство. За целта е подходящо да се запознаят с разнообразни начини за получаване на паркетирани плочки, както и с творчеството на последователи на Ешер [2].

### 3. Заключение

В творчеството на редица художници математиката и изобразителното изкуство са свързани по уникален начин и изследването, разкриването и използването на тези връзки в образованието е полезно. Особено силен е ефектът върху мотивацията на ученици, за които математиката не е любим учебен предмет. Изследванията на учениците могат да продължат на различно равнище и в различни области: математика, изкуство, информационни технологии или съчетанието им. Така ученици с разнообразни интереси могат да намерят в предложената тема онова зрънце, което провокира интереса, възбужда изследователския дух, мотивира за продължителна работа. Постигане на такава отдаденост на ученика в ролята на изследовател е една от целите на проект *Fibonacci* ([3], [4]) и успяхме да я видим реализирана чрез учениците на Елисавета Стефанова от СОУ [2].

### Литература

1. Чехларова, Т., Е. Сендова. (2012) *Необикновено за обикновените дроби – изследвания с динамични конструкции*. Макрос. ISBN 978-954-561-282-4
2. Chehlarova, T., E. Sendova, E. Stefanova, (2012) *Dynamic tessellations in support of the inquiry-based learning of mathematics and arts*, in Theory, Practice and Impact – Proceedings of Constructionism 2012, Athens, Kynigos, C., Clayson, J., Yiannoutsou, N. (Eds) August 21-25, pp.570-574. ISBN: 978-960-88298-3-1 (Printed book) ISBN: 978-960-88298-4-8
3. Kenderov, P., E. Sendova. (2012) *Towards enhancing the inquiry based mathematics education*. In: Re-Designing Institutional Policies and Practices to Enhance the Quality of Education through Innovative Use of Digital Technologies – Unesco International Workshop Sofia, State University of Library studies and Information technologies. 2012. pp.56-70 ISBN 978-954-2946-19-9
4. Baptist, P. and D. Raab (eds.) (2012) *Implementing Inquiry in Mathematics Education*, Bayreuth, ISBN 978-3-00-040752-9