Българска академия на науките
Институт по математика и информатика

Данила Дмитриевич Черкашин

ЕКСТРЕМАЛНИ ПРОБЛЕМИ В ЕВКЛИДОВАТА КОМБИНАТОРНА ГЕОМЕТРИЯ

АВТОРЕФЕРАТ

за присъждане на научна степен
"Доктор на Науките"

Област на висше образование: 4. Природни науки, Математика и Информатика
Професионално направление: 4.5. Математика

София, 2024

1 Увод

Настоящата дисертация е посветена на екстремални задачи в пресечни точки на евклидовата геометрия и комбинаториката.

Да разгледаме *дистанционния граф* $G(\mathbb{R}^d)$ на евклидово пространство, който е пълен претеглен граф с набор от върхове $\mathbb{R}^d$ и тегла според евклидовата метрика. Типичен пример е G или неговият "подграф" $G(V, \rho) = (V, E_\rho)$, където V е подмножество на $\mathbb{R}^d$ и E_ρ се състои от двойките върхове на разстояние ρ. Ще разглеждаме както крайни, така и безкрайни V.

Ще се фокусираме върху няколко класически комбинаторни задачи: задачата за дървото на Щайнер, задачата за намиране на максимално независимо множество и задачата за намиране на хроматичното число. Да отбележим, че тези три задачи принадлежат на първоначалния списък на Карп от 21 NP-пълни проблема [24].

Нека започнем с крайни и безкрайни Евклидови версии на задачата на Щайнер.

Задача 1.1. *(Задача на Щайнер) За дадено ограничено множество $P = \{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}^d$ да се намери свързано множество $\mathcal{S}t$ с минимална дължина (едномерна мярка на Хаусдорф $\mathcal{H}^1$), съдържащо P.*

Основните резултати по Задача 1.1 са описани в статията [21] и книгата [22]. По-специално е известно, че има краен (но вероятно от порядък $n!$) брой локални минимуми. NP-трудността на евклидовата версия на Задачата е доказана от Гари, Греъм и Джонсън [19].

Ще разглеждаме и следната версия на задачата на Щайнер.

Задача 1.2. *За дадено компактно множество $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^d$ да се намери множество $\mathcal{S}t$ с минимална дължина (едномерна мярка на Хаусдорф $\mathcal{H}^1$), така че множеството $\mathcal{S}t \cup \mathcal{A}$ е свързано.*

Съществуването на решения и някои локални свойства на тези решения на Задача 1.2 са показани от Паолини и Степанов [32]. Решение на Задача 1.1 или 1.2 се нарича *дърво на Щайнер* поради липсата на цикли.

Нека да преминем към независими и хроматични числа на метрични пространства. *Оцветяване* на даден набор M е карта от M към набора от цветове. Оцветяване на подмножество M на метрично пространство е *правилно*, ако нито една двойка монохроматични точки не лежи на разстояние 1 една от друга. Минималният брой цветове, който допуска правилно оцветяване на M, се нарича *хроматичното число* на M и се означава с $\chi(M)$. В случая на $M \subset \mathbb{R}^d$, разстоянието обикновено идва от индуцираната евклидова метрика на M.

Малко по-различна гледна точка е да се разгледа *графа на единичните разстояния* $G(M)$: точките на M са върховете на $G(M)$ и ръбовете свързват всички двойки точки на единично разстояние една от друга. По дефиниция $\chi(M) = \chi(G(M))$. Теоремата на де Брьойн–Ердьош [13] гласи, че ако $\chi(M) < \infty$, тогава има краен подграф H на $G(M)$, такъв че $\chi(H) = \chi(G(M))$.

Намирането на хроматични числа на метрично пространство е класическа задача; най-известният частен въпрос принадлежи на Нелсън и Хадвигер и се състои в намирането на хроматичното число $\chi(\mathbb{R}^2)$ на евклидовата равнина. Точната стойност на $\chi(\mathbb{R}^2)$ все още не е известна и най-добрите граници в този случай са $5 \leq \chi(\mathbb{R}^2) \leq 7$ (вижте [14]).

Да дефинираме графите $G(d, k, \varepsilon)$, чиито върхове са точките на среза

$$\mathrm{Slice}(d, k, \varepsilon) := \mathbb{R}^d \times [0, \varepsilon]^k$$

и ръбовете свързват точките на евклидово разстояние 1 една от друга. Нека

$$\chi[\mathrm{Slice}(d, k, \varepsilon)] := \chi[G(d, k, \varepsilon)],$$

където $\chi(H)$ е хроматичното число на графа H. Очевидно за всяко положително ε имаме

$$\chi(\mathbb{R}^d) \leq \chi[\mathrm{Slice}(d, k, \varepsilon)] \leq \chi(\mathbb{R}^{d+k}).$$

Тъй като $\chi(\mathbb{R}^d) = (3 + o(1))^d$ (вижте [27]), хроматичното число на среза е крайно. Да обърнем внимание, че най-добрата известна долна граница също е експоненциална [36].

2 Резултати

2.1 Резултати от Глава 2

Първата глава на дисертацията е посветена на задачата за Евклидовото дърво на Щайнер. Добре известно е, че е възможно задачата на Щайнер да има няколко решения; най-простият пример са върховете на квадрат. Показваме, че тази ситуация се случва рядко за равнинни конфигурации.

Да означим с $\mathbb{P}_d := (\mathbb{R}^d)^n \setminus diag$ пространството от маркирани n-точкови конфигурации $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d$ на различни точки в евклидовото пространство, където $diag$ е обединението на $(dn - d)$-мерни подпространства $x_i = x_j$, $i \neq j$. Конфигурация $P \in \mathbb{P}_d$ е *нееднозначна*, ако има няколко дървета на Щайнер за P. Иванов и Тужилин показаха в [23], че множеството от еднозначни конфигурации съдържа подмножество, което е отворено и плътно в $\mathbb{P}_2$. Усилваме този резултат по следния начин.

Теорема 2.1 (Басок–Черкашин–Растегаев–Теплицкая [1]). *Нека $n \geq 4$ и $d \geq 2$. Тогава наборът от равнинни нееднозначни конфигурации в $\mathbb{P}_2$ има Хаусдорфова размерност $2n - 1$.*

Еделсбрунер и Стрелкова показаха [16, 15], че ако фиксираме комбинаторика на решение на задачата на Щайнер в Евклидово пространство, тогава за всяко $d \geq 2$ подмножеството от конфигурации в $\mathbb{P}_d$, за които уникалното дърво на Щайнер има дадената комбинаторика, е свързано (path-connected). Разширяваме този резултат по следния начин.

Теорема 2.2 (Басок–Черкашин–Растегаев–Теплицкая [1]). *Подмножеството на $\mathbb{P}_d$ от n-точкови конфигурации, за които дървото на Щайнер е уникално, е свързано (path-connected).*

В доказателството на Теорема 2.2 използваме съществуването на универсално дърво на Щайнер, т.е. дърво, което съдържа решение на всяка възможна крайна комбинаторика. Първият пример за такова дърво на Щайнер е даден в [34]. Също така, това беше първият пример за безкрайно неразложимо (т.е. не може да бъде представено като обединение на решенията за $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}$) дърво на Щайнер. Той обаче не беше самоподобен и имаше нулева Хаусдорфова размерност. Следващият резултат представя пример за неразложимо универсално дърво на Щайнер, чиято Хаусдорфова размерност е $-\frac{\ln 2}{\ln \lambda} > 0$, където $\lambda < 1/300$. Нека $A_\infty(\lambda)$ е (неизброимо, компактно) множество, състоящо се от корена и листата на фрактално двоично дърво $\Sigma(\lambda)$ със съотношение на дължината на ръбовете на последователни нива, равно на λ.

Теорема 2.3 (Черкашин–Теплицкая, [8]). *Двоично дърво $\Sigma(\lambda)$ е дърво на Щайнер за $A_\infty(\lambda)$ при условие, че $\lambda < 1/300$.*

Струва си да се отбележи, че съвсем наскоро Теорема 2.3 беше значително подобрена от Паолини и Степанов.

Теорема 2.4 (Паолини–Степанов, [33]). *Двоично дърво $\Sigma(\lambda)$ е* ***уникално*** *дърво на Щайнер за $A_\infty(\lambda)$ при условие, че $\lambda < 1/25$.*

2.2 Резултати от Глава 3

Задачата на Джилбърт–Щайнер [20, 2] е обобщение на задачата за дървото на Щайнер върху конкретен оптимален масов транспорт. Ще продължим с формалната дефиниция.

Дефиниция 2.1. *Нека μ^+, μ^- са две крайни мерки в метрично пространство $(X, \rho(\cdot,\cdot))$ с крайни носители, така че общите маси $\mu^+(X) = \mu^-(X)$ са равни. Нека $V \subset X$ е крайно множество, съдържащо носителя на знаковата мярка (signed measure) $\mu^+ - \mu^-$; елементите на V се наричат* върхове. *Освен това, нека E е крайна колекция от неподредени двойки $\{x, y\} \subset V$, които наричаме* ръбове. *И така, (V, E) е прост неориентиран краен граф. Да приемем, че за всяко $\{x, y\} \in E$ са дефинирани две ненулеви реални числа $m(x, y)$ и $m(y, x)$ така, че $m(x, y) + m(y, x) = 0$. Този набор от данни се нарича* (μ^+, μ^-)-поток *ако е изпълнено равенството*

$$\mu^+ - \mu^- = \sum_{\{x,y\}\in E} m(x, y) \cdot (\delta_y - \delta_x),$$

където δ_x е делта-мярка в x (да отбележим, че събираемите $m(x, y) \cdot (\delta_y - \delta_x)$ са добре дефинирани в смисъл, че не зависят от реда на x и y).

Нека $C\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$ е *ценова функция*. Изразът

$$\sum_{\{x,y\}\in E} C(|m(x, y)|) \cdot \rho(x, y)$$

се нарича *функционал на Джилбърт* на (μ^+, μ^-)-поток.

Задачата на Джилбърт–Щайнер е да се намери потокът, който минимизира функционала на Джилбърт с ценова функция $C(x) = x^p$, за фиксирано $p \in (0, 1)$. Решение на задачата се нарича *минимален поток*.

Върховете от $\operatorname{supp}(\mu^+)\setminus\operatorname{supp}(\mu^-)$ се наричат *терминали*. Връх от $V\setminus\operatorname{supp}(\mu^+)\setminus\operatorname{supp}(\mu^-)$ се нарича *точка на разклонение*. Формално ние позволяваме точка на разклонение да има степен 2, но очевидно това никога не се случва в минимален поток.

Локалната структура в задачата на Джилбърт–Щайнер е разгледана в работата [2], а статията [28] се занимава с равнинния случай. Локалната картина около точка на разклонение b от степен 3 е ясна благодарение на първоначалната статия на Джилбърт [20]. Подобно на намирането на точката на Ферма–Торичели в класическата задача на Щайнер, ъглите около b по отношение на масите могат да бъдат определени.

Теорема 2.5 (Липман–Санмартин–Хампрехт [28], 2022)**.** *Решението на равнинния проблем на Джилбърт–Щайнер няма точка на разклонение със степен поне 5.*

Ние намираме условия за ценовата функция, при които всички точки на разклонение в равнинно решение имат степен 3. Тези условия са малко по-силни от условията [37] на Шьонберг на вграждането на метриката на формата $\rho(x, y) := f(x - y)$ към хилбертово пространство. По-специално, това обхваща случая на стандартната функция на разходите x^p, $0 < p < 1$, както следва.

Дефиниция 2.2. *Нека λ е Борелова мярка на $\mathbb{R}$, за която*

$$\int_{\mathbb{R}} \min(x^2, 1) d\lambda(x) < \infty. \tag{1}$$

Да предположим допълнително, че носителят на мярката λ е неизброим. Функция $f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ от вида

$$f(t) = \sqrt{\int_{\mathbb{R}} \sin^2(tx)\, d\lambda(x)} = \frac{1}{2}\|e^{2itx} - 1\|_{L^2(\lambda)} \qquad (2)$$

се нарича допустима.

Основният резултат от глава 3 е следната теорема.

Теорема 2.6 (Черкашин–Петров [5])**.** *Нека μ^+, μ^- са две мерки с крайни носители в евклидовата равнина $\mathbb{R}^2$ и нека ценовата функция C е допустима. Тогава, ако (μ^+, μ^-)-поток има точка на разклонение със степен най-малко 4, то съществува (μ^+, μ^-)-поток със строго по-малка стойност на функционала на Джилбърт.*

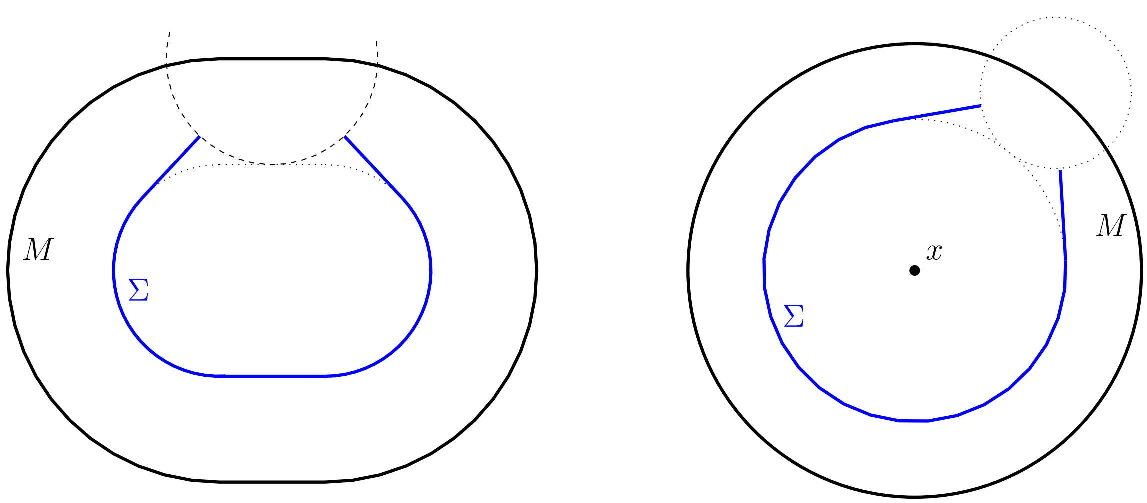
В частност, получаваме като следствие такова твърдение.

Теорема 2.7 (Черкашин–Петров [5])**.** *Решението на равнината задача на Джилбърт–Щайнер няма точка на разклонение със степен, по-голяма от 3.*

2.3 Резултати от Глава 4

В глава 4 разглеждаме задачата за минимизиране на максималното разстояние до дадено компактно множество M измежду множествата с дадена дължина ℓ. Този задача се появява за пръв път в [3], а по-късно е разглеждана в работите [30, 31].

Главата започва с преглед на резултатите по задачата, след което намираме минимизатори на максимално разстояние за затворена равнинна крива с достатъчно малка кривина. Отговорът на въпроса за окръжност с радиус $R > r$ беше предположен от Миранда, Паолини и Степанов [30].



Фигура 1: Минимизатор Σ за изпъкнала затворена равнинна крива M с радиус на кривина най-малко $5r$ във всяка точка, така наречената *подкова* (вляво). Минимизатор Σ за $M = \partial B_R(x)$, където $R > 4,98r$ (вдясно)

Теорема 2.8 (Черкашин–Теплицкая, 2018 [6]). *Нека r е положително реално число, M е изпъкнала затворена крива с радиус на кривина поне $5r$ във всяка своя точка, Σ е произволен минимизатор за M, а M_r е кривата, равноотдалечена на M на разстояние r във вътрешна посока. Тогава Σ е обединение на дъга от M_r и две отсечки, които са допирателни към M_r в краищата на дъгата (т.нар. подкова, виж Фиг. 1). Когато M е окръжност с радиус R, условието $R > 4.98r$ е достатъчно.*

Доказателството е технически сложно, като основната идея е да се сведе сравняването на дължини към сравняване на мярки на ъгли. Някои технически моменти са опростени и обобщени в работата [11].

Главата завършва с пакет отворени въпроси от обзора [7], измежду които ще отбележим следния.

Въпрос 2.1. *Съществува ли неравнинен минимизатор на максимално разстояние с безкраен брой точки на разклоняване?*

2.4 Резултати от Глава 5

Подмножество I от върхове на G е *независимо*, ако нито едно ребро не свързва върхове на I. *Число на независимост* на граф G е максималната мощност на независимо множество в G; ние го означаваме с $\alpha(G)$.

Глава 5 се занимава с числа на независимост и хроматични числа на графи от тип Джонсън. Графите от типа на Джонсън $J_{\pm}(d,k,t)$ се дефинират по следния начин: върхове са всички вектори от $\{-1,0,1\}^d$ с точно k ненулеви координати, а два върха са свързани с ребро тогава и само тогава, когато скаларното им произведение е равно на t.

В работата [4] са получени точните стойности на числата на независимост в няколко важни случая. Нека $S(d,D)$ е константата от съответното решение на изодиаметралната задача върху куб на Хеминг, определена в статията на Клейтман [26],

$$S(d,D) := \begin{cases} \sum_{j=0}^{m} \binom{d}{j} & \text{ако } D = 2m, \\ \binom{d-1}{m} + \sum_{j=0}^{m} \binom{d}{j} & \text{ако } D = 2m+1, \end{cases}$$

където d е размерността на куба на Хеминг, а D е диаметърът на разглежданите множества.

Теорема 2.9 (Черкашин–Киселев [4]). *Нека t е цяло отрицателно нечетно число. Съществува константа $d_0(k)$, такава, че за всяко $d > d_0(k)$*

$$\alpha[J_{\pm}(d,k,t)] = S\left(k, |t|-1\right)\binom{d}{k}.$$

Важният случай $t = -1$ с помощта на някои допълнителни аргументи дава следния точен резултат.

Теорема 2.10 (Черкашин–Киселев [4]). *Нека $d > \frac{9}{2}k^3 2^k$. Тогава*

$$\alpha[J_{\pm}(d,k,0)] = 2\binom{d-1}{k-1}.$$

Да отбележим, че за фиксирано k и отрицателно t равенството

$$\alpha[J_{\pm}(d,k,t)] = (1+o(1))S\left(k,|t|-1\right)\binom{d}{k}$$

е получено от Франкл и Купавский [17, 18], но за четни отрицателни t не е възможно да се изключи $o(1)$-члена. Това е свързано с факта, че основната техника в доказателствата на Франкл–Купавский е т.нар. *shifting*, а тази техника не може да се приложи директно към графи от тип Джонсън. Нашите доказателства се основават на метода за усредняване на Катона [25], който се базира на неравенството

$$\frac{\alpha(G)}{|V(G)|} \le \frac{\alpha(H)}{|V(H)|},$$

което е в сила за всеки подграф H на върхово-транзитивен граф G, за внимателен избор на подграфа H. За да намерим правилен подграф H от тип Джонсън, ние използваме някои конструкции на прости хиперграфи, които идват от кодовете на Рийд–Соломон.

Също така за $k = 3$ и $t = -2$ получаваме асимптотиката на хроматичното число на графите от тип Джонсън.

Теорема 2.11 (Черкашин [10]). *За всяко $d \ge 3$ са изпълнени следните неравенства*

$$\lceil \log_2 \lceil \log_2 d \rceil \rceil \le \chi(J_{\pm}[d,3,-2]) \le 4\lceil \log_2 \lceil \log_2 d \rceil \rceil + 6.$$

Интуицията на доказателството на Теорема 2.11 идва от факта, че ребра на пълна n-върхова графа не могат да бъдат покрити с по-малко от $\lceil \log_2(n) \rceil$ пълни двуделни графи.

2.5 Резултати от Глава 6

През 1976 г. Симонс [38] предположи, че всяко оцветяване на двумерна сфера с радиус, строго по-голям от $1/2$, в три цвята има двойка монохроматични точки на разстояние 1 една от друга. Глава 6 съдържа доказателството на тази хипотеза. Това прецизира резултата на Ловас [29], който показва, че съществува последователност от радиуси r_k с ограничение $1/2$, така че двумерна сфера с радиус r_k има хроматично число поне 4.

Теорема 2.12 (Черкашин–Воронов [9]). *За всяко $r > \frac{1}{2}$, който имаме*

$$\chi(S^2(r)) \ge 4,$$

където $S^2(r) \subset \mathbb{R}^3$ е двумерна сфера.

В случая $\frac{1}{2} < r \le \frac{\sqrt{3-\sqrt{3}}}{2}$ границата се достига, т.е. $\chi(S^2(r)) = 4$.

Да напомним, че хроматичното число на една сфера е крайно, така че теоремата на де Брьойн–Ердьош предполага, че то се постига върху краен подграф. Нашето доказателство обаче не предоставя явен пример за сферичен подграф с хроматично число 4.

Доказателството може да бъде скицирано по следния начин. Предполагаме, че съществува правилно 3-оцветяване на сфера; тогава първата стъпка от доказателството показва, че всеки цвят е плътен в сферата. Втората стъпка използва теорема за неявна функция, приложена към вграждане на нечетен цикъл с допълнителен висящ елемент на всеки връх. Това приложение и условие за плътност ни позволяват да преместим всеки висящ връх до точка с цвят 1, което веднага дава противоречие.

2.6 Резултати от Глава 7

В Глава 7 се разглеждат задачи за хроматичното число на тремерни срезове. Основният резултат дава следните граници.

Теорема 2.13 (Черкашин–Канель-Белов–Струков–Воронов [39]). *Съществува $\varepsilon_0 > 0$, така че за всяко положително число $\varepsilon < \varepsilon_0$ са в сила неравнствата*

$$10 \leq \chi[\mathrm{Slice}(3, 6, \varepsilon)] \leq 15.$$

Ще отбележим, че горната граница е модификация на добре позната граница, която идва от известното пермутоедрално разбиване [35, 12] (permutohedron tiling). Доказателството съчетава комбинаторни и топологични аргументи. По-специално, ние използваме следния резултат, който е от независим интерес.

Теорема 2.14 (Черкашин–Канель-Белов–Струков–Воронов [10]). *Нека $T \subset \mathbb{R}^d$ е правилен симплекс с дължина на ръба $a = \sqrt{2d(d+1)}$. Тогава всяко правилно оцветяване на $\mathbb{R}^d$ в краен брой цветове съдържа точка от T, принадлежаща на затварянията на поне $d+1$ цвята.*

3 Публикации

Дисертация се основава на следните статии и препринти:

1. "On the horseshoe conjecture for maximal distance minimizers", D. Cherkashin, Y. Teplitskaya, ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations 24 (3), 1015–1041, 2018 (IF2018 1.295, Q2)

2. "A self-similar infinite binary tree is a solution to the Steiner problem", D. Cherkashin, Y. Teplitskaya, Fractal and Fractional 7 (5), 414, 2023 (IF2022 5.4, Q1)

3. "Independence numbers of Johnson-type graphs", D. Cherkashin, S. Kiselev, Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series 54 (3), 30, 2023 (IF2022 0.7, Q3)

4. "On the chromatic number of 2-dimensional spheres", D. Cherkashin, V. Voronov, Discrete & Computational Geometry, 71, 467–479, 2024 (IF2022 0.8, Q3)

5. "On the chromatic numbers of 3-dimensional slices", V.A. Voronov, A.Y. Kanel-Belov, G.A. Strukov, D.D. Cherkashin, Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI 518, 94–113, 2022 (in Russian, English translation to appear in Journal of Mathematical Sciences, SJR2022 0.314, Q3)

6. "On the chromatic numbers of Johnson-type graphs", D.D. Cherkashin, Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI 518, 192–200, 2022 (in Russian, English translation to appear in Journal of Mathematical Sciences, SJR2022 0.314, Q3)

7. "On uniqueness in Steiner problem", M. Basok, D. Cherkashin, N. Rastegaev, Y. Teplitskaya, preprint arXiv:1809.01463, to appear in IMRN, 2024 (IF2022 1.0, Q2)

8. "On minimizers of the maximal distance functional for a planar convex closed smooth curve" D.D. Cherkashin, A.S. Gordeev, G.A. Strukov, Y.I. Teplitskaya, preprint arXiv:2011.10463, submitted to St. Petersburg Mathematical Journal

9. “Branching points in the planar Gilbert–Steiner problem have degree 3”, D. Cherkashin, F. Petrov, preprint arXiv:2309.04202, to appear in Pure and Applied Functional Analysis, the volume is dedicated to the memory of Anatoly Moiseevich Vershik

10. “An overview of maximal distance minimizers problem”, D. Cherkashin, Y. Teplitskaya, preprint arXiv:2212.05607, submitted to Serdica Mathematical Journal

4 Благодарности

Бих искал да благодаря на моите съавтори, а именно Михаил Басок, Алексей Гордеев, Алексей Канель-Белов, Сергей Киселев, Федор Петров, Емануеле Паолини, Никита Растегаев, Георгий Струков, Яна Теплицкая и Всеволод Воронов.

Благодаря на секция Математически основи на информатиката в Института по математика и информатика за създадените отлични условия за работа и за организацията на процедурата по защитата.

Литература

[1] Mikhail Basok, Danila Cherkashin, Nikita Rastegaev, and Yana Teplitskaya. On uniqueness in Steiner problem. *International Mathematics Research Notices*, page rnae025, 2024.

[2] Marc Bernot, Vicent Caselles, and Jean-Michel Morel. *Optimal transportation networks: models and theory*. Springer, 2008.

[3] Giuseppe Buttazzo, Edouard Oudet, and Eugene Stepanov. Optimal transportation problems with free Dirichlet regions. In *Variational methods for discontinuous structures*, pages 41–65. Springer, 2002.

[4] Danila Cherkashin and Sergei Kiselev. Independence numbers of Johnson-type graphs. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series*, 54(3):30, 2023.

[5] Danila Cherkashin and Fedor Petrov. Branching points in the planar Gilbert–Steiner problem have degree 3. *arXiv preprint arXiv:2309.04202*, 2023.

[6] Danila Cherkashin and Yana Teplitskaya. On the horseshoe conjecture for maximal distance minimizers. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 24(3):1015–1041, 2018.

[7] Danila Cherkashin and Yana Teplitskaya. An overview of maximal distance minimizers problem. *arXiv preprint arXiv:2212.05607*, 2022.

[8] Danila Cherkashin and Yana Teplitskaya. A self-similar infinite binary tree is a solution to the Steiner problem. *Fractal and Fractional*, 7(5):414, 2023.

[9] Danila Cherkashin and Vsevolod Voronov. On the chromatic number of 2-dimensional spheres. *Discrete & Computational Geometry*, 71:467–479, 2024.

[10] D.D. Cherkashin. On the chromatic numbers of Johnson-type graphs. *Zapiski Nauchnuh Seminarov POMI*, 518:192–200, 2022. [English translation will appear in Journal of Mathematical Sciences].

[11] D.D. Cherkashin, A.S. Gordeev, G.A. Strukov, and Y.I. Teplitskaya. On minimizers of the maximal distance functional for a planar convex closed smooth curve. *arXiv preprint arXiv*, 2020.

[12] David Coulson. A 15-colouring of 3-space omitting distance one. *Discrete mathematics*, 256(1):83–90, 2002.

[13] Nicolaas G. de Bruijn and Paul Erdős. A colour problem for infinite graphs and a problem in the theory of relations. *Indigationes Mathematicae*, 13:371–373, 1951.

[14] Aubrey D. N. J. de Grey. The chromatic number of the plane is at least 5. *Geombinatorics*, 25(1):18–31, 2018.

[15] Herbert Edelsbrunner and Nataliya Strelkova. On the configuration space of Steiner minimal trees. *arXiv preprint arXiv:1906.06577*, 2019.

[16] Herbert Edelsbrunner and Nataliya P. Strelkova. On the configuration space of Steiner minimal trees. *Russian Mathematical Surveys*, 67(6):1167–1168, 2012.

[17] Peter Frankl and Andrey Kupavskii. Intersection theorems for $\{0, \pm 1\}$-vectors and s-cross-intersecting families. *Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory*, 2(7):91–109, 2017.

[18] Peter Frankl and Andrey Kupavskii. Correction to the article Intersection theorems for $(0,\pm 1)$-vectors and s-cross-intersecting families. *Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory*, 8(4):389–391, 2019.

[19] Michael R. Garey, Ronald L. Graham, and David S. Johnson. The complexity of computing Steiner minimal trees. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 32(4):835–859, 1977.

[20] Edgar N. Gilbert. Minimum cost communication networks. *Bell System Technical Journal*, 46(9):2209–2227, 1967.

[21] Edgar N. Gilbert and Henry O. Pollak. Steiner minimal trees. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 16(1):1–29, 1968.

[22] Frank K. Hwang, Dana S. Richards, and Pawel Winter. *The Steiner tree problem*, volume 53. Elsevier, 1992.

[23] Alexandr O. Ivanov and Alexey A. Tuzhilin. Uniqueness of Steiner minimal trees on boundaries in general position. *Sbornik: Mathematics*, 197(9):1309–1340, 2006.

[24] Richard M. Karp. Reducibility among combinatorial problems. In *Complexity of Computer Computations*, pages 85–103. Springer, 1972.

[25] Gyula O.H. Katona. Extremal problems for hypergraphs. In *Combinatorics*, pages 215–244. Springer, 1975.

[26] Daniel J. Kleitman. On a combinatorial conjecture of Erdős. *Journal of Combinatorial Theory*, 1(2):209–214, 1966.

[27] David G. Larman and C. Ambrose Rogers. The realization of distances within sets in Euclidean space. *Mathematika*, 19(1):1–24, 1972.

[28] Peter Lippmann, Enrique Fita Sanmartín, and Fred A. Hamprecht. Theory and approximate solvers for branched optimal transport with multiple sources. *Advances in Neural Information Processing Systems*, 35:267–279, 2022.

[29] László Lovász. Self-dual polytopes and the chromatic number of distance graphs on the sphere. *Acta Sci. Math.(Szeged)*, 45(1-4):317–323, 1983.

[30] M. Miranda, Jr., E. Paolini, and E. Stepanov. On one-dimensional continua uniformly approximating planar sets. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 27(3):287–309, 2006.

[31] Emanuele Paolini and Eugene Stepanov. Qualitative properties of maximum distance minimizers and average distance minimizers in $\mathbb{R}^n$. *Journal of Mathematical Sciences*, 122(3):3290–3309, 2004.

[32] Emanuele Paolini and Eugene Stepanov. Existence and regularity results for the Steiner problem. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 46(3-4):837–860, 2013.

[33] Emanuele Paolini and Eugene Stepanov. On the Steiner tree connecting a fractal set. *arXiv preprint arXiv:2304.01932*, 2023.

[34] Emanuele Paolini, Eugene Stepanov, and Yana Teplitskaya. An example of an infinite Steiner tree connecting an uncountable set. *Advances in Calculus of Variations*, 8(3):267–290, 2015.

[35] Radoš Radoičić and Géza Tóth. Note on the chromatic number of the space. In *Discrete and computational geometry, Algorithms and Combinatorics book series*, volume 25, pages 695–698. Springer, 2003.

[36] Andrei M. Raigorodskii. On the chromatic number of a space. *Russian Mathematical Surveys*, 55(2):351–352, 2000.

[37] Isaak J. Schoenberg. Metric spaces and positive definite functions. *Transactions of the American Mathematical Society*, 44(3):522–536, 1938.

[38] Gustavus J. Simmons. The chromatic number of the sphere. *Journal of the Australian Mathematical Society*, 21(4):473–480, 1976.

[39] V.A. Voronov, A.Ya. Kanel-Belov, G.A. Strukov, and D.D. Cherkashin. On the chromatic numbers of 3-dimensional slices. *Zapiski Nauchnuh Seminarov POMI*, 518:94–113, 2022. [English translation will appear in Journal of Mathematical Sciences].