Справка за приносите
на доц. д-р Деко Деков
на публикации с номера от 11 до 19 в списъка на публикациите

По-долу е дадена справка за приносите на статии с номера от 11 до 19 в списъка на публикациите. Към проблематиката на тези статии спада и статия с номер 20 от списъка на публикациите, публикувана през 2001 г. в Mathematica Balkanica. Справка за тази статия е дадена отделно, тъй като справката по-долу е изготвена през 1999 г. Справката до-долу е за следните девет статии:

1. Deko V. Dekov, The embedding of semigroup amalgams, Journal of Algebra, 141, 1991, 158-161.
2. Deko V. Dekov, The clas of al S-pregroups is not finitely axiomatizable, Proceeding of the American Mathematical Society, 115, 1992, pp. 895-897.
3. Deko V. Dekov, Free products with amalgamations of semigroups, Semigroup Forum, 46, 1993, pp. 54-61.
4. Deko V. Dekov, HNN extensions of semigroups, Semigroup Forum, 49, 1994, pp. 83-87.
5. Deko V. Dekov, Embeddability and the word problems, Journal of Symbolic Logic, 60, 1995, 1194-1198.
6. Deko V. Dekov, Finite complete rewriting systems for groups, Communications in Algebra, 25, 1997, 4023- 4028.
7. Deko V. Dekov, Free products with amalgamation of monoids, Journal of Pure and Applied Algebra, 125, 1998, pp. 129-133.
8. Deko V. Dekov, The class of al embeddable semigroup amalgams is not finitely axiomatizable, Journal of Pure and Applied Algebra, 125, 1998, 135-139.
9. Deko V. Dekov, Deciding embeddability of partial groupoids into semigroups, Semigroup Forum, 58, 1999, pp. 359-414.

След изясняването на въпроса, че не всяка полугрупова амалгама се влага в полугрупа, възниква въпроса да се намерят достатъчни условия за вложимост на полугрупови амалгама в полугрупи. През 1941 г. P. Dubreil [Dubreil 1941] въвежда понятието унитарна подполугрупа на полугрупа, което е естествено обобщение на понятието подгрупа на група. През 1960 г. Graham Higman формулира хипотезата (виж [Howie 1976], p. 231), че ако общата подполугрупа в една полугрупова амалгама е унитарна подполугрупа на всяка от полугрупите на амалгамата, то амалгамата се влага в полугрупа. Доказателство на хипотезата на G. Higman е публикувано от J. M. Howie през 1962 г. ([Howie 1962]). Впоследствие, опростено в различни варианти, това доказателство е включено в учебници по теория на полугрупите (виж [Clifford and Preston 1967] (превод на руски език: А. Клиффорд и Г. Престон, Алгебраическая теория полугрупп, Мир, Москва, том 1 и том 2, 1972), [Howie 1976]). Към проблема за вложимост на полугрупови амалгами се подхожда с различни методи и техники и нови доказателства на класическия резултат на Howie за вложимост на унитарни полугрупови амалгами са дадени от G. Lallement [Lallement 1975], G. B. Preston [Preston 1976], T. E. Hall [Hall 1978], D. A. Jackson [Jackson 1978], J. Renshaw [1986].

Всички изброени по-горе доказателства имат недостатъка, че трудно могат да бъдат прочетени, поради тяхната сложност. В статията [Dekov 1991] е дадено първото кратко доказателство на класическия резултат на Howie. Основната разлика между това доказателство и предишните доказателства, е неговата тривиалност. Доказателството може да бъде прочетено без затруднения и за кратко време, в отличие от предишните доказателства, чиято сложност ги прави практически нечитаеми.

Доказателството на класическия резултат на J. M. Howie, дадено в [Dekov 1991], се основава на наблюдението, че резултата на J. M. Howie може да бъде получен като непосредствено следствие на резултат, публикуван през 1950 г. от R. Baer [Baer 1950b].

През 1949 г. и 1950 г. R. Baer публикува три статии [Baer 1949], [Baer 1950a], [Baer 1950b], в които предлага нов подход към проблема за вложимостта на групови амалгами в групи, базиран върху частичните групоиди. Подходът на R. Baer води до ново доказателство на класическия резултат на O. Schreier и до нови доказателства на резултати на H. Neumann. Тези статии на R. Baer, останали недостатъчно внимателно прочетени в течение на дълъг период от време, съдържат много повече. Някои от резултатите, съдържащи се в тези статии, са преоткривани от различни автори впоследствие. Ще отбележим някои факти. През 1971 г. J. R. Stallings [Stallings 1971] (превод на руски език: в У. Масси, Дж. Столлингс, Алгебраическая топология. Введение, Мир, Москва, 1977) въвежда понятието "предгрупа", като част от алгебричния апарат за изучаване на топологията на тримерни многообразия, и доказва основната теорема за предгрупите. Основната теорема за предгрупите всъщност се съдържа в статията [Baer 1950b]. По-нататък, F. Rimlinger [Rimlinger 1987], ученик на J. R. Stallings, доказва друга основна теорема за предгрупите, която също се съдържа в статията [Baer 1950b]. Предгрупите се изучават интензивно и скоро е забелязано, че една от аксиомите за предгрупа може да бъде пропусната, тъй като е следствие от останалите. През 1988 г. A. H. M. Hoare [Hoare 1988] отбелязва, че твърдението, че аксиома (3) е следствие от останалите аксиоми, е доказано за първи път от Squier. Същото е отбелязано и в обзора [Chiswell 1991]. Всъщност, това твърдение се съдържа в статията [Baer 1950a].

Цитираните три статии на R. Baer съдържат основни теореми за вложимост на частични групоиди в полугрупи. Ще отбележим, че основната теорема за U-предполугрупите дълги години се приписва на J. Schmidt [Schmidt 1968] (виж например учебника [Ляпин и Евсеев 1991], Глава 5, Теорема 2.16, и редица статии на Е. С. Ляпин и негови ученици ; ще отбележим, че Е. С. Ляпин и учениците му наричат U-предполугрупите "независими частични полугрупи"). Всъщност, основната теорема за U-предполугрупите се съдържа в [Baer 1950b]. Подобно е положението и с няколко други основни теореми за вложимост на частични групоиди в полугрупи и в групи.

Един от резултатите на R. Baer, съдържащ се в неговата статия [Baer 1950b], които не са преоткрити впоследствие, е основната теорема за L-предполугрупите. В статията [Dekov 1991] е въведен термина "предполугрупа" ; в статията [Dekov 1999], с цел да се унифицира терминологията, е предложено този термин да бъде заменен с термина "L-предполугрупа".

В статията [Dekov 1991] е показано, че класическият резултат на J. M. Howie за вложимост на унитарни полугрупови амалгами е непосредствено следствие на теоремата на R. Baer за L-предполугрупите. Нещо повече, от теоремата на R. Baer следва, че ако една полугрупова амалгама е унитарна, то в свободното произведение на амалгамата еквивалентните редуцирани думи имат една и съща дължина. Подобно свойство имат груповите амалгами: в свободното произведение на всяка групова амалгама еквивалентните редуцирани думи имат една и съща дължина.

Естествено възниква въпроса да се характеризират всички полугрупови амалгами имащи горното свойство, т.е., всички полугрупови амалгами, които се влагат в полугрупа и такива, че в свободните произведения на амалгамите еквивалентните редуцирани думи имат една и съща дължина. В терминологията на [Dekov 1999] въпросът може да се формулира така: Да се характеризират всички полугрупови амалгами, чиито частични групоиди са L-предполугрупи. Тази характеризация е дадена в статията [Dekov 1993], като е използувана основната теорема на R. Baer за L-предполугрупите.

За да може да бъдат характеризирани полугруповите амалгами, чиито частични групоиди са L-предполугрупи, в статията [Dekov 1993] е въведено понятието "квази-унитарна" подполугрупа на полугрупа. Понятието "квази-унитарна" подполугрупа на полугрупа е обощение на три понятия: идеал, унитарна подполугрупа и разделяща се единично-идеална подполугрупа.(Последното от трите понятия е въведено от Е. С. Ляпин). Характеризация на полугруповите амалгами, чиито частични групоиди са L-предполугрупи е дадена в теорема 4 на [Dekov 1993]. Разбира се, като частен случай се получава резултата, публикуван в [Dekov 1991].

През 1969 г. Е. С. Ляпин [Ляпин 1969] дава характеризация на полугруповите амалгами, такива че в техните свободни произведения еквивалентните редуцирани думи са равни. Доказателството е публикувано в [Ляпин 1970], а през 1974 г. Е. С. Ляпин дава усъвършенствувана формулировка на характеризацията в [Ляпин 1974]. Като се използува основната теорема на R. Baer за U-предполугрупите, става възможно да се даде кратко доказателство на теоремата на Е. С. Ляпин. Това доказателство е дадено в [Dekov 1993]. В статията [Dekov 1993] е отбелязано, че частен случай на теоремата на Е. С. Ляпин е теорема, публикувана през 1973 г. от J.-C. Spehner [Spehner 1973]. Този частен случай J.-C. Spehner доказва като използува основната теорема на R. Baer за U-предполугрупите. В статията [Dekov 1993] също така е отбелязано, че частен случай на теоремата на J.-C. Spehner е теорема, публикувана през 1970 г. от P. A. Grillet and M. Petrich [Grillet and Petrich 1970].

През 1950 г., за да изучи свободните произведения с амалгамиране на групи, R. Baer [Baer 1950a] въвежда концепцията за S-предгрупа и дава едно безкрайно множество от аксиоми за S-предгрупа, като всяка аксиома от това множество може да се запише като елементарна (т.е., на език на логиката от първи ред) аксиома. През 1966 г. Адян [Адян 1966] показва, че всяка полугрупа, зададанена с ациклично задаване (без цикли, cycle-free) се влага в група. През 1987 г. J. R. Stallings [Stallings 1987] изучава ацикличните задавания на полугрупи и показва, че всяко ациклично задаване на полугрупа дефинира S-предгрупа. В цитираната работа J. R. Stallings въвежда термина "S-предгрупа". В същата работа J. R. Stallings поставя въпроса за намиране на крайно множество от аксиоми от първи ред за S-предгрупите (Question 5, p. 340). На стр. 325 от същата работа J. R. Stallings аргументира въпроса с това, че аксиоматичната характеризация на S-предгрупите е далеч по-малко удовлитворителна ("far less satisfactory") от аксиоматичната характеризация на предгрупите.

Въпросът, поставен от J. R. Stallings не може да получи отговор без използуването на математическата логика и по-точно на теорията на моделите. В работата [Dekov 1992] е даден отговор на въпроса на J. R. Stallings, като е показано, че класът на всички S-предгрупи не е крайно аксиоматизируем в логиката от първи ред, т.е., не може да бъде характеризиран с никакво крайно множество от елементарни аксиоми. В тази работа е използуван метод от математическата логика, който впоследствие е използуван и в работите [Dekov 1995], [Dekov 1998b], [Dekov 1999]. Критичен момент при използването на метода е построяването на структура за език от първи ред L, такава че тази структура е модел на всяко крайно подмножество на дадено безкрайно множество от аксиоми на L, но не е модел на безкрайното множество от аксиоми. Казано с други думи, структурата трябва да удовлетворява всяко крайно подмножество на безкрайното множество от аксиоми, но да не удовлетворява безкрайното множество от аксиоми. Ясно е, че построяването на такъв модел силно зависи от даденото безкрайното множество от аксиоми.

През 1949 г. G. Higman, B. H. Neumann and H. Neumann [Higman, Neumann and Neumann 1949] дефинират групова конструкция, сега известна като HNN разширение на група. Известно е, че впоследствие тази конструкция се оказва особено полезна при доказването на алгоритмичната неразрешимост на проблема за думите за групи. През 1963 г. J. M. Howie [Howie 1963c] дефинира HNN разширения на полугрупи и получава резултат, съответстващ на теоремата на Higman, Neumann and Neumann, при предпоставката, че двете подполугрупи на полугрупа, участвуващи в конструкцията, са унитарни. През 1978 г. в своята дисертация, написана под ръководството на P. E. Schupp, D. A. Jackson [Jackson 1978] дава ново доказателство на резултата на J. M. Howie за HNN разширения на полугрупи, а също така доказва полугруповия аналог на известната лема на Britton.

През 1971 г. нов подход към HNN разширенията на групи е даден от J. R. Stallings [Stallings 1971]. Подходът на J. R. Stallings, базиран върху основната теорема за предгрупите, води до ново доказателство на теоремата на Higman, Neumann and Neumann и до ново доказателство на лемата на Britton.

В работата [Dekov 1993] основната теорема на R. Baer за L-предполугрупите е използвана, за да бъде дадено достатъчно условие за вложимост на полугрупова амалгама в полугрупа. В работата [Dekov 1994] се използва отново основната теорема на R. Baer за L-предполугрупите и се използва метода на J. R. Stallings, като се дават нови доказателства на резултатите за HNN разширения на полугрупи на J. M. Howie и на D. A. Jackson. Всъщност, в работата [Dekov 1994] е предложен усъвършенствуван вариант на метода на J. R. Stallings, който позволява съществено да бъдат съкратени пресмятанията.

Известно е, че основен проблем при алгебричните структури, зададени с генератори и определящи релации, е проблемът за думите (the word problem). През 1951 г. Trevor Evans [Evans 1951b] открива метод за доказване на разрешимостта на проблема за думите, приложим към широк кръг от алгебрични структури. С този метод за първи път е доказана разрешимостта на проблема за думите за решетките, лупите, квазигрупите и редица други алгебрични структури. Методът на T. Evans се състои в следното: На всяко многообразие **V** от алгебрични структури T. Evans съпоставя клас от частични алгебрични структури, наричани в [Dekov 1995] "частични евансови **V**-алгебри". Ако класът на частичните евансови **V**-алгебри е крайно аксиоматизируем в логиката от първи ред, то проблемът за думите за многообразието **V** е разрешим.

През 1953 г. T. Evans [Evans 1953] поставя въпроса дали обратното е вярно, т.е., въпроса дали ако проблемът за думите за многообразието **V** е разрешим, от това следва, че класът на частичните евансови **V**-алгебри е крайно аксиоматизируем в логиката от първи ред.

Отговор на въпроса на T. Evans е даден в статията [Dekov 1995]. Отговорът е отрицателен. В статията [Dekov 1995] е използувано многообразието **CSg** на комутативните полугрупи. Известно е, че това многообразие има разрешим проблеми за думите, което е показано за първи път от А. И. Мальцев през 1958 г. В работата [Dekov 1995] частичните евансови **CSg**-алгебри се наричат "частични евансови комутативни полугрупи". В работата [Dekov 1995] е показано, че класът на всички частични евансови комутативни полугрупи не е крайно аксиоматизируем в логиката от първи ред. По този начин е показано, че от разрешимостта на проблема за думите за многообразието на комутативните полугрупи не следва крайната аксиоматизируемост в логиката от първи ред на класа на всички частични евансови комутативни полугрупи.

Горният резултат може да бъде доказан само с използуването на математическата логика. Използува се същият метод от математическата логика, както в [Dekov 1992]. Използува се език от първи ред L, съдържащ един тернарен предикатен символ. Както в работата [Dekov 1992], критичен момент е построяването на структура за езика L, която има необходимите свойства: Тази структура е модел на всяко крайно подмножество на безкрайното подмножество от аксиоми за частични евансови комутативни полугрупи, но не е модел на безкрайното множество от аксиоми за частични евансови комутативни полугрупи. Разбира се, този път структурата за езика L, която е построена, е съществено различна (в сравнение със структурата, построена в [Dekov 1992]), защото съществено различна е безкрайната система от аксиоми за частични евансови комутативни полугрупи. Съществено различно е и доказателството, че построената структура има необходимите свойства.

Методът, използуван в [Dekov 1995] е образец за пет последващи доказателства: едно доказателство, публикувано в [Dekov 1998b] и четири доказателства, публикувани в [Dekov 1999].

Статията [Dekov 1998b] е посветена отново на проблема за вложимостта на полугруповите амалгами. След основополагащите статии на J. M. Howie, проблемът за вложимостта на полугруповите амалгами е в центъра на вниманието на редица изследователи. Очертават се няколко подхода, използуващи различни техники. Ще споменем имената на T. E. Hall, G. B. Preston, G. Lallement, G. T. Clarke, P.-A. Grillet, M. Petrich, J. Renshaw, K. Shoji, D. A. Jackson, Е. С. Ляпин. Централен резултат получава през 1975 г. T. E. Hall [Hall 1975], който показва, че резултата на O. Schreier, съгласно който всяка групова амалгама се влага в група, се разширява до класа на инверсните полугрупи.

Естествено възниква въпроса дали съществува крайно множество от формули в логиката от първи ред, което може да служи като необходимо и достатъчно условие за вложимост на полугрупова амалгама в полугрупа. Отговорът на този въпрос е даден в работата [Dekov 1998b]. Отговорът е отрицателен, т.е., никакво крайно множество от формули от първи ред не може да служи като необходимо и достатъчно условие за вложимост на полугрупова амалгама в полугрупа. Ще отбележим, че до този отговор може да стигне, ако се анализират и преобразуват резултатите на G. Lallement, публикувани през 1975 г. в статията [Lallement 1975]. Тази статия на G. Lallement обаче е трудна за четене и в нея не се използува математическата логика. В статията [Dekov 1998b] е показано, че необходимо и достатъчно условие за вложимост на полугрупова амалгама в полугрупа може да бъде записано като едно безкрайно множество от формули от първи ред. Това безкрайно множество от формули от първи ред е точно множеството от формули от първи ред, което служи като необходимо и достатъчно условие за вложимост на частичен групоид в полугрупа и което ще означим с $\mathbf{P}$. По-нататък, в статията [Dekov 1998b] е използван същият метод, както в [Dekov 1995]. Критичен момент и тук е построяването на структура за език L, състоящ се от един тернарен предикатен символ. В този случай тази структура е полугрупова амалгама. Построената полугрупова амалгама е модел на всяко крайно подмножество на $\mathbf{P}$, но не е модел на $\mathbf{P}$.

През последните години в теоретичната информатика беше разработена теорията на системите от редукции. Теорията на системите от редукции води началото си от основополагащите работи на M. H. A. Newman [Newman 1942], Trevor Evans [Evans 1951a], D. E. Knuth и P. Bendix [Knuth and Bendix 1970]. В това направление днес работят голям брой изследователи. Сред многобройните области на приложения на теорията на системите от редукции са алгебрата, функционалното програмиране, логическото програмиране, автоматичното доказателство на теореми, компютърната алгебра.

Известно е, че проблемът за думите за групите и проблемът за думите за полугрупите са неразрешими. С помощта на теорията на системите от редукции за много класове от групи и полугрупи може да бъде намерен прост алгоритъм за решаване на проблема за думите. Една крайна пълна система от редукции R за група G дава просто решение на проблема за думите както следва: Две думи са еквивалентни тогава и само тогава, когато техните R-редуцирани форми (често наричани нормални форми или канонични форми) съвпадат. По същия начин, една крайна пълна система от редукции за полугрупа дава просто решение на проблема за думите за полугрупата.

Теорията на системите от редукции се използува в работите [Dekov 1997], [Dekov 1998a], [Dekov 1999].

През 1912 г. M. Dehn [Dehn 1912] решава проблема за думите за фундаменталната група Φ_g на затворена ориентирана повърхнина от род g,

$$\Phi_g =< a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g \ ; \ a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \ldots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1 >$$

За обзори върху комбинаторната теория на групите отпращаме читателя към [Magnus, Karrass ans Solitar 1966], [Lyndon and Schupp 1977], [Chandler and Magnus 1982].

През 1992 г. S. M. Hermiller [Hermiller 1992] (виж също [Hermiller [1994]) дава крайна пълна система от редукции R за групата Φ_g, зададена с посоченото по-горе задаване. За да докаже, че системата от редукции R е завършваща (т.е., може да се определи с краен брой стъпки дали две думи са еквивалентни или не), S. M. Hermiller използува лява рекурсивна строга наредба, породена от линейна строга наредба върху множеството на генераторите и техните обратни. Ще отбележим, че лявата рекурсивна строга наредба върху едно множество е дефинирана през 1982 г. от N. Dershowitz [Dershowitz 1982]. В работата [Dekov 1997] е използувана отново лява рекурсивна строга наредба, която обаче е породена от строга наредба върху множеството на генераторите и техните обратни, която не е линейна, а частична. Дефинираната в [Dekov 1997] наредба е минималната наредба, която може да бъде използувана, а линейната наредба на S. M. Hermiller е разширение на дефинираната в [Dekov 1997] частична наредба.

В работата [Dekov 1997], на основата на наблюдението, че конструкцията на S. M. Hermiller допуска обобщение, са дадени крайни пълни системи от редукции за един безкраен клас от групи. Две от групите от този клас са особено съществени: Фундаменталната група Φ_g на затворена ориентирана повърхнина от род g и фундаменталната група Φ на повърхнина от род g. В този клас се включва и свободната абелева група, породена от два генератора.

По-нататък, в работата [Dekov 1997] е предложена нова проста наредба, с която може да се докаже, че системата от редукции R за фундаменталната група Φ_g на затворена ориентирана повърхнина от род g е завършваща. Същата наредба служи, за да бъде показано, че системите от редукции за групите от споменатия по-горе безкраен клас от групи, са завършващи. В работата [Dekov 1997] тази нова наредба е наречена наредба на Benninghofen- Kemmerich-Richter, тъй като през 1987 г. B. Benninghofen, S. Kemmerich и M. M. Richter [Benninghofen, Kemmerich and Richter 1987] са дефинирали подобна наредба. (В работата [Benninghofen, Kemmerich and Richter 1987] при дефинирането на споменатата наредба на стр. 211 е допусната грешка, за което съобщих с писмо на професор M. M. Richter през 1996 г.).

През 1994 г. J. Pedersen и M. Yoder [Pedersen and Yoder 1994] дават крайна пълна система от редукции за Артиновата група на сплитанията (the braid group), породена от три генератора. В работата [Dekov 1997], като се изхожда от наблюдението, че конструкцията на J. Pedersen и M. Yoder може да бъде обобщена, е дадена крайна пълна система от редукции $R(G)$ за групата на торичните възли (the torus knot group), зададена със задаването

$$G = < a, b, c \; ; \; a^n = b^m = c >$$

където $m, n \geq 1$. Дадено е и ново доказателство на твърдението, че системата от редукции за Артиновата група на сплитанията, дадена от J. Pedersen and M. Yoder, е завършваща, като е показано, че за целта може да бъде използвана подходяща лява рекурсивна строга наредба, породена от строга наредба върху множеството на генераторите и техните обратни. Тази лява рекурсивна строга наредба е използвана и за по-общия случай на системата от редукции за групата на торичните възли.

През 1960 г. М. Гриндлингер [Grindlinger 1960] е показал, че алгоритъмът на Dehn не може да реши проблема за думите за групата $G = < a, b, c \; ; \; abc = cba >$. През 1984 г. F. Otto [Otto 1984] дава крайна пълна система от редукции $R_1(G)$ за групата на Гриндлингер. В работата [Dekov 1997] е дадено ново просто доказателство на твърдението, че системата от редукции $R_1(G)$ е завършваща. Показано е, че просто доказателство на завършването на $R_1(G)$ може да бъде получено, като се използва подходяща лява рекурсивна строга наредба, породена от строга наредба върху множеството на генераторите и техните обратни.

През 1986 г. Ph. LeChenadec [LeChenadec 1986] дава друга крайна пълна система от редукции $R_2(G)$ за групата на Гриндлингер. В работата [Dekov 1997] е отбелязано, че четирите стандартни нареби, а именно, редуциращата теглото и лява лексикографска строга наредба, редуциращата теглото и дясна лексикографска строга наредба, лявата рекурсивна строга наредба и дясната рекурсивна строга наредба, не мога да бъдат използувани, за да бъде доказано, че системата от редукции $R_2(G)$ е завършваща. В работата [Dekov 1997] е дадено ново доказателство на твърдението, че системата от редукции $R_2(G)$ е завършваща. За целта е въведена нова проста наредба, която в [Dekov 1997] е наречена наредба на Martin, тъй като през 1993 г. подобна наредба е дефинирана от U. Martin [Martin 1993].

През 1980 г. Trevor Evans [Evans 1980], като използува техниката на системите от редукции, дава ново доказателство на класическата теорема на O. Schreier за вложимост на групова амалгама в група. В работата [Dekov 1998a] идеята на T. Evans е усъвършенствувана, с цел да се получи ново просто доказателство на класическата теорема на O. Schreier. За целта са направени две основни промени. Първо, дефинирана е нова система от редукции R, такава че доказателството на твърдението, че R е конфлуентна, е тривиално. Второ, за да бъде доказано, че системата от редукции R е завършваща, е използувана редуцираща наредба. Редуциращата наредба, която е използувана, е стандартната редуцираща теглото и лява лексикографска строга наредба. С пример е показано, че наредбата, използувана от T. Evans [Evans 1980] не е редуцираща.

N. Bourbaki [Bourbaki 1970] е дал обобщение на класическата теорема на O. Schreier, отнасящо се до свободни произведения с амалгамиране на моноиди. В работата [Dekov 1998a] е дадено ново доказателство на по-общата теорема на N. Bourbaki. Доказателството на теоремата на O. Schreier се получава непосредствено като частен случай, ако някои множества се положат да бъдат равни на празното множество.

Проблемът за вложимостта на частични групоиди в полугрупи е неразрешим, т.е., не съществува алгоритъм, който да дава отговор на въпроса дали краен частичен групоид може да бъде вложен в полугрупа ([Evans 1953], [Evans 1978]). В статията [Dekov 1999] се прави преглед на проблема за вложимост на частични групоиди в полугрупи. Дефинирани са основните класове от частични групоиди, вложими в полугрупи, въведени са унифицирана терминология и унифицирани означения.

Показано е, че четири основни класа от частични групоиди са аксиоматизируеми в логиката от първи ред, но не са крайно аксиоматизируеми. Тези класове са следните: Класът на всички асоциативни частични групоиди (един асоциативен частичен групоид може да не се влага в полугрупа), класът на всички частични полугрупи (т.е., класът на всички частични групоиди, вложими в полугрупи), класът на всички R-предполугрупи (т.е., класът на всички частични групоиди, които могат да бъдат получени от полугрупи посредством ограничения на бинарните операции на полугрупите върху непразни подмножества) и класът на всички S-предполугрупи. Ще отбележим, че тези четири класа от частични групоиди са въведени от R. Baer [Baer 1949], който е доказал основни теореми за тези четири класа. При доказателството на твърдението, че тези четири класа не са крайно аксиоматизируеми в логиката от първи ред отново е използван метода от [Dekov 1995], като критичен момент е построяването на подходящи структури за език от първи ред L, състоящ се от един тернарен предикатен символ. Ще отбележим, че R. Baer в началото на статията [Baer 1949] поставя проблема за характеризацията на тези класове. От казаното по-горе се вижда, че тези четири класа не могат да бъдат характеризирани с никакви крайни множества от формули от първи ред.

През 1953 г. Trevor Evans [Evans 1953] отбелязва, че класът на всички частични полугрупи не е крайно аксиоматизируем в логиката от първи ред. Бележката на T. Evans обаче са базира на факта, че проблемът за думите за полугрупите е неразрешим. В доказателството, дадено в [Dekov 1999], не се използва неразрешимостта на проблема за думите за полугрупите.

През 1972 г. P. Gudder [Gudder 1972] поставя въпроса дали ако един частичен групоид е непълна полугрупа (понятието "непълна полугрупа" е въведено през 1951 г. от T. Evans [Evans 1951]), от това следва, че този частичен групоид е R-предполугрупа, и ако отговорът е отрицателен, да бъде дадена характеризация на R-предполугрупите. В [Dekov 1999] е даден прост пример на непълна полугрупа, която не е R-предполугрупа. Дадена е и характеризация на R-предполугрупите, но както беше казано по-горе, класът на всички R-предполугрупи не е крайно аксиоматизируем в логиката от първи ред.

Както беше отбелязано по-горе, основите на теорията на системите от редукции са положени от M. H. A. Newman [Newman 1942] и D. E. Knuth and P. B. Bendix [Knuth and Bendix 1970]. През 1950 г. R. Baer [Baer 1950b] публикува основната теорема за U-предполугрупите. В работата [Dekov 1999] е показано, че частен случай на основен резултат от теорията на системите от редукции може да бъде формулиран като теорема, като тази теорема ще вкючва в себе си основната теорема на R. Baer за U-предполугрупите. Нещо повече, тази теорема установява връзка между U-предполугрупите и пълните системи от редукции, като тази връзка е полезна както при U-предполугрупите, така и при прилагане на някои системи от редукции. Показано е също така, че естественото място на основната теорема на R. Baer за U-предполугрупите е в рамките на теорията на системите от редукции. По този начин е получено и ново доказателство на основната теорема на R. Baer за U-предполугрупите.

В работата [Dekov 1993] U-предполугрупите бяха използвани, за да бъде дадено ново доказателство на теоремата на Е. С. Ляпин за вложение на полугрупови амалгами. В работата [Dekov 1999] са разгледани някои полугрупи, които могат да бъдат разглеждани като универсални полугрупи на U-предполугрупи: свободната полугрупа, свободното произведение на полугрупи, четири-спиралната полугрупа Sp_4 на K. Byleen, J. Meakin and F. Pastijn [Byleen, Meakin and Pastijn 1978], бицикличната полугрупа $C(p, q)$. Във всички тези случаи получаваме прости доказателства на твърдението, че еквивалентните редуцирани думи съвпадат. Като пример за приложение на основната теорема на R. Baer за U-предполугрупите, е дадено ново кратко доказателство на теорема на Л. В. Лободина [Лободина 1992], даваща критерий за вложимост на обобщени полугрупови амалгами в полугрупи. Обобщените полугрупови амалгами са въведени през 1974 г. от Е. С. Ляпин [Ляпин 1974].

През 1966 г. J. R. Stallings [Stallings 1966] въвежда понятието U-предгрупа ("частична полугрупа" в терминологията на J. R. Stallings) и доказва основната теорема за U-предгрупите. В работата [Dekov 1999] е дадено ново доказателство на тази теорема, като е показано, че тя е следствие на теоремата на R. Baer за U-предполугрупите. По този начин, е показано, че теоремата на J. R. Stallings за U-предгрупите е частен случай на основен резултат от теорията на системите от редукции. От това се вижда, че естественото място на теоремата на J. R. Stallings за U-предгрупите е в теорията на системите от редукции.

През 1978 г. P. W. Bunting, J. van Leeuwen and D. Tamari [Bunting, van Leeuwen and Tamari 1978] изследват вложимостта в полугрупи на частичните групоиди от трети ред. Съгласно тяхно твърдение, от 262144 частични групоиди от трети ред, 24733 се влагат в полугрупи. P. W. Bunting, J. van Leeuwen and D. Tamari използуват компютърна програма за изследването на посочения проблем. Тази програма е приложима към всички частични групоиди от трети ред, с изключение на 16 частични групоиди (а също така и един частичен групоид от втори ред), при които P. W. Bunting, J. van Leeuwn and D. Tamari провеждат изчисленията на ръка ("by hand"), използувайки методи от теорията на формалните езици и граматики и метод, разработен от тях. Оказва се, че всички тези 17 частични групоиди се влагат в полугрупи.

В работата [Dekov 1999] е дадено ново доказателство на твърдението, че 17-те частични групоиди на P. W. Bunting, J. van Leeuwen and D. Tamari се влагат в полугрупи. Същевременно, тези частични групоиди са използувани, за да бъдат илюстрирани някои концепции, срещащи се в статията [Dekov 1999]. Оказва се, че от 17-те частични групоиди, 5 са U-предполугрупи, един частичен групоид е L-предполугрупа, която не е U-предполугрупа, 9 частични групоиди са R-предполугрупи, но не са S-предполугрупи и останалите 2 частични групоиди не са R-предполугрупи.

През 1972 г. G. R. Baird [Baird 1972] въвежда понятието "частичен банд". Ако S е полугрупа и ако множеството $E(S)$ на идемпотентите на S е непразно, то относителният частичен подгрупоид на S, определен от подмножеството $E(S)$ (т.е., ограничението на бинарната операция на S върху подмножеството $E(S)$), е частичен банд. През 1974 г. A. H. Clifford [Clifford 1974] въвежда понятието "основа" ("warp") и показва, че всеки частичен банд е основа ([Clifford 1975], Theorem 1.1). През 1974 г. A. H. Clifford [Clifford 1974] поставя въпроса дали обратното е вярно, т.е., дали всяка основа е частичен банд. В работата [Dekov 1999] е даден отговор на този въпрос. Отговорът е отрицателен. В [Dekov 1999] е даден прост пример на основа, която не е частичен банд. (Този пример беше съобщен от мен през 1990 г. с писмо на A. H. Clifford, който даде положителна оценка на примера). За пример на основа, която не е частичен банд е взет един от 17-частични групоиди на P. W. Bunting, J. van Leeuwen and D. Tamari.

През 1960 г. С. И. Адян [Адян 1960] публикува формулировката, а през 1966 г. публикува доказателството [Адян 1966] на своя известен резултат, съгласно който ако една полугрупа е зададена е ациклично задаване, то тя се влага в група. В [Адян 1966] има пример (Глава 2, Пример 3), който показва, че това условие не е необходимо. Независимо от Адян, през 1963 г. G. C. Bush [Bush 1963] дава пример, с който показва, че условието на Адян не е необходимо. (Примерът на G. C. Bush е включен и в учебника на P. M. Higgins ([Higgins 1992], p.185). На описанието на примера си G. C. Bush посвещава една статия, публикувана в *Proceedings of the American Mathematical Society*, а именно, статията [Bush 1963]. В работата [Dekov 1999] е даден прост пример, който показва, че условието на Адян не е необходимо. За целта се използува един от 17-те частични групоиди на P. W. Bunting, J. van Leeuwen and Tamari,а именно, частичният групоид от втори ред. Този частичен групоид има два елемента: a, b и две умножения: $aa = b, bb = a$, следователно, универсалната полугрупа на този частичен групоид е полугрупата със задаване $S = sgp(a, b\ ;\ aa = b,\ bb = a)$. Това задаване има ляв цикъл и десен цикъл, но S всъщност е група, а именно, цикличната група от трети ред. В [Dekov 1999] е отбелязано, че най-простият пример е полугруповото задаване $sgp(a\ ;\ aa = a)$ на полугрупата с един елемент, която същевременно е и група с един елемент. Очевидно, това задаване има ляв цикъл и десен цикъл.

В работата [Dekov 1999] един частичен групоид, чиято таблица на умноженията може да бъде допълнена до таблица на умноженията на полугрупа, се нарича "T-предполугрупа". Отбелязано е, че един от 17-те частични групоиди на P. W. Bunting, J. van Leeuwen and D. Tamari е T-предполугрупа и е показано как таблицата на умноженията на този частичен групоид може да бъде допълнена до таблица на умноженията на полугрупа. За същия частичен групоид P. W. Bunting, J. van Leeuwen and Tamari твърдят ([Bunting, van Leeuwen and Tamari 1978], p. 598) че компютърната програма, използувана от тях, е показала, че този частичен групоид не е T-предполугрупа. Следователно, компютърната програма, използувана в [Bunting, van Leeuwen and Tamari 1978] е извела погрешно твърдение, което показва, че тази компютърна програма има дефект. Тъй като резултатите в споменатата статия са получени с тази компютърна програма, те стават невалидни, а проблемът за съществуване на алгоритъм, който да показва за произволен частичен групоид от трети ред, дали този частичен групоид се влага в полугрупа или не, за който P. W. Bunting, J. van Leeuwen and D. Tamari твърдят, че е решен, остава открит. Това наблюдение беше съобщено през 1997 г. с писмо на проф. J. van Leeuwen, който оцени положително това наблюдение и отбеляза, че компютърната програма е написана от P. W. Bunting.

Процедурата за попълване на Knuth и Bendix играе централна роля в теорията на системите от редукции. В работата [Dekov 1999] се предлага още едно приложение на процедурата за попълване на Knuth и Bendix, а именно, предлага се използването на тази процедура за решаване на проблема за вложимостта на частични групоиди в полугрупи.

Използуването на процедурата за попълване на Knuth и Bendix се илюстрира с два примера.

Известно е, че крайна групова амалгама винаги се влага в крайна група. През 1964 г. J. M. Howie [Howie 1964a] поставя въпроса дали съществува крайна полугрупова амалгама, която е вложима в полугрупа, но не е вложима в крайна полугрупа. Отговорът е даден през 1975 г. от T. E. Hall [Hall 1975], който дава пример (приписан от T. E. Hall на C. J. Ash), с който показва, че такава крайна полугрупова амалгама съществува. В статията [Dekov 1999], като се използува процедурата за попълване на Knuth и Bendix, се дава просто доказателство на твърдението, че полугруповата амалгама на Ash се влага в полугрупа, но не се влага в крайна полугрупа.

След това процедурата за попълване на Knuth и Bendix се използува, за да се даде второ доказателство на твърдението, че 17-те частични групоиди на P. W. Bunting, J. van Leeuwen and D. Tamari се влагат в полугрупа. Показано е също така, че крайните пълни системи от редукции, които се получават при прилагане на процедурата за попълване на Knuth и Bendix, могат да се използуват за изучаване на универсалните полугрупи на тези частични групоиди. Показано е, че универсалните полугрупи на 5 от 17-те частични групоиди на P. W. Bunting, J. van Leeuwen and D. Tamari са безкрайни полугрупи, таблиците на умноженията на универсалните полугрупи на останалите 12 частични групоиди са дадени.

По-горе беше отбелязано, че проблемът за съществуване на алгоритъм, който да дава отговор на въпроса дали един частичен групоид от трети ред се влага в полугрупа или не, остава открит, предвид на отбелязаният в [Dekov 1999] дефект в компютърната програма, използувана в [Bunting, van Leeuwen and Tamari 1978]. От работата [Dekov 1999] се вижда, че процедурата за попълване на Knuth и Bendix е приложима към всички 17 частични групоиди на P. W. Bunting, J. van Leeuwen and D. Tamari. Това дава основание да се предположи, че тази процедура е приложима към всички частични групоиди от втори и трети ред, т.е., може да се предположи, че процедурата за попълване на Knuth и Bendix е алгоритъм, с който може да се покаже дали един частичен групоид от втори или трети ред е вложим в полугрупа. Това предположение лесно може да се провери с помощта на компютър за всички 262144 частични групоиди от трети ред, предвид на многобройните широко използувани компютърни програми за попълване по Knuth и Bendix. По този начин би могло да се получи решение на проблема, предмет на изучаване в [Bunting, van Leeuwen and Tamari

1978].

Естествено възниква въпроса: Кое е най-малкото естествено число n, такова че проблемът за вложимостта за частичните групоиди от ред n е разрешим, но проблемът за вложимостта за частичните групоиди от ред $n + 1$ е неразрешим. Това е един от проблемите в математиката, които се дефинират по тривиален начин, но за които няма надежда да бъде получен отговор.

Литература

[Baer 1949] R. Baer, Free sums of groups and their generalizations. An analysis of the associative law, *Amer. J. Math.* **71** (1949), 706-742.

[Baer 1950a] R. Baer, Free sums of groups and their generalizations II, *Amer. J. Math.* **72** (1950), 625-646.

[Baer 1950b] R. Baer, Free sums of groups and their generalizations III, *Amer. J. Math.* **72** (1950),647-670.

[Baird 1972] G.R.Baird, On semigroups and uniform partial bands, *Semigroup Forum* **4** (1972), 185-188.

[Benninghofen, Kemmerich and Richter 1987] B. Benninghofen, S. Kemmerich and M.M. Richter, *Systems of Reductions*, Lecture Notes in Computer Science, Vol.**277**, Springer, Berlin, 1987.

[Bourbaki 1970] N. Bourbaki, *Eléments de Mathématique, Algèbre, Chs 1-3*, Hermann, Paris, 1970.

[Bunting, van Leeuwen and Tamari 1978] P.W. Bunting, J. van Leeuwen and D. Tamari, Deciding associativity for partial multiplication tables of order 3, *Math. of Computation* **32** (1978), 593-605.

[Bush 1963] G.C. Bush, Note on an embedding theorem of Adyan, *Proc.Amer.Math.Soc.* **14** (1963), 597-599.

[Byleen, Meakin and Pastijn 1978] K. Byleen, J. Meakin and F. Patijn, The fundamental four-spiral semigroup, *J. Algebra* **54** (1978),6-26.

[Chandler and Magnus 1982] B. Chandler and W. Magnus, *The History of Combinatorial Group Theory*, Berlin, Springer-Verlag, 1982.

[Chiswell 1991] I. M. Chiswell, Pregroups and Lyndon length functions, in: *Arboreal Group Theory* (R. C. Alperin, editor), New York, Springer-Verlag, 1991, pp.169-181.

[Clifford 1974] A.H. Clifford, *The Fundamental Representation of a Regular Semigroup*, Math. Dept. of Tulane University, 1974.

[Clifford 1975] A.H. Clifford, The fundamental representation of a regular semigroup, *Semigroup Forum*, **10** (1975), 84-92.

[Clifford and Preston 1961,1967] A.H. Clifford and G.B. Preston, *The Algebraic Theory of Semigroups*, Mathematical Surveys, no. 7, Amer.Math. Soc., Providence, R.I., vol.I, 1961, vol.II, 1967.

[Dehn 1912] M. Dehn, Transformation der kurven auf zweiseitigen flächen, *Math. Annalen* **72** (1912), 413-421.

[Dekov 1991] D.V. Dekov, The embedding of semigroup amalgams, *Journal of Algebra* **141** (1991), 158-161

[Dekov 1992] D.V. Dekov, The class of all S-pregroups is not finitely axiomatizable, *Proceedings of the American Mathematical Society* **115** (1992), 895-897.

[Dekov 1993] D.V. Dekov, Free products with amalgamation of semigroups, *Semigroup Forum* **46** (1993), 54-61.

[Dekov 1994] D.V. Dekov, HNN extensions of semigroups, *Semigroup Forum*, **49** (1994), 83-87.

[Dekov 1995] D.V. Dekov, Embeddability and the word problem, *Journal of Symbolic Logic* **60** (1995), 1194-1198.

[Dekov 1997] D.V. Dekov, Finite complete rewriting systems for groups, *Communications in Algebra* **25** (1997), 4023-4028.

[Dekov 1998a] D.V. Dekov, Free products with amalgamation of monoids, *Journal of Pure and Applied Algebra* **125** (1998), 129-133.

[Dekov 1998b] D.V. Dekov, The class of all embeddable semigroup amalgams is not finitely axiomatizable, *Journal of Pure and Applied Algebra* **125** (1998), 135-139.

[Dekov 1999] D.V. Dekov, Deciding embeddability of partial groupoids into semigroups, *Semigroup Forum* **58** (1999), 395-414.

[Dershowitz 1982] N. Dershowitz, Orderings for term-rewriting systems, *Theoret. Comput. Sci.* **17** (1982), 279-301.

[Dubreil 1941] P. Dubreil, Contribution à la théorie des demi-groupes, *Mém. Acad. Sci. Inst. France* (2) **63** no.3 (1941), 1-52.

[Evans 1951a] T. Evans, On multilicative systems defined by generators and relations I. Normal form theorems, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **47** (1951), 637-649.

[Evans 1951b] T. Evans, The word problem for abstract algebras, *J. London Math.Soc.* **26** (1951), 64-71.

[Evans 1953] T. Evans, Embeddability and the word problem, *J.London Math.Soc.* **28** (1953), 76-80.

[Evans 1978] T. Evans, Word problems, *Bull.Amer.Math.Soc.* **84** (1978), 789-802.

[Evans 1980] T. Evans, Some solvable word problems, in: *Word Problems*, vol.II (S.I. Adian, W.W. Boone and G.Higman, editors), North-Holland, Amsterdam, 1980, pp.87-100.

[Greendlinger 1960] M. Greendlinger, Dehn's algorithm for the word problem, *Comm. Pure Appl. Math.* **13** (1960), 67-83.

[Grillet and Petrich 1970] P.A.Grillet and M. Petrich, Free products of semigroups amalgamating an ideal, *J. London Math. Soc.* (2) **2** (1970), 389-392.

[Gudder 1972] S.P. Gudder, Partial algebraic structures associated with orthomodular posets, *Pacific J. Math.* **41** (1972), 717-730.

[Hall 1975] T.E. Hall, Free products with amalgamation of inverse semigroups, *J. Algebra* **34** (1975), 375-385.

[Hall 1978] T.E. Hall, Representation extension and amalgamation for semigroups, *Quart. J. Math. Oxford* (2) **29** (1978), 309-334.

[Hermiller 1992] S.M. Hermiller, *Rewriting Systems for Coxeter groups*, Ph.D.Thesis, Cornell University, 1992.

[Hermiller 1994] S.M. Hermiller, Rewriting systems for Coxeter groups, *J.Pure Appl.Algebra* **92** (1994), 137-148.

[Higgins 1992] P.M. Higgins, *Techniques of Semigroup Theory*, Oxford University Press, Oxford, 1992.

[Higman, Neumann and Neumann 1949] G. Higman, B.H. Neumann and H. Neumann, Embedding theorems for groups, *J. London Math. Soc.* **24** (1949), 247-254.

[Hoare 1988] A. H. M. Hoare, Pregroups and length functions, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **104** (1988), 21-30.

[Howie 1962] J.M. Howie, Embedding theorems with amalgamation for semigroups, *Proc.London Math.Soc.* (3) **12** (1962), 511-534.

[Howie 1963a] J.M. Howie, An embedding theorem with amalgamation for cancellative semigroups, *Proc.Glasgow Math.Assoc.* **6** (1963), 19-26.

[Howie 1963b] J.M. Howie, Subsemigroups of amalgamated free products of semigroups, *Proc.London Math.Soc.* (3) **13** (1963), 672-686.

[Howie 1963c] J.M. Howie, Embedding theorems for semigroups, *Quart. J. Math. Oxford* (2) **14** (1963), 254-258.

[Howie 1964a] J.M. Howie, The embedding of semigroup amalgams, *Quart. J. Math. Oxford* (2) **15** (1964), 55-68.

[Howie 1964b] J.M.Howie, Subsemigroups of amalgamated free products of semigroups II, *Proc.London Math.Soc.* (3) **14** (1964), 537-544.

[Howie 1976] J.M. Howie, *An Introduction to Semigroup Theory*, London Math.Soc.Monographs, no. 7, Academic Press, London, 1976.

[Jackson 1978] D.A. Jackson, *A Normal Form Theorem for Higman-Neumann-Neumann Extensions of Semigroups*, Ph. D. Thesis, University of Illinois at Urbana-Champaign, 1978.

[Jónsson 1956] B. Jónsson, Universal relational systems, *Math. Scand.* **4** (1956), 193-208.

[Kimura 1957] N. Kimura, *On Semigroups*, Ph. D. Thesis, Tulane University, 1957.

[Knuth and Bendix 1970] D.E. Knuth and P.B. Bendix, Simple word problems in universal algebra, in: *Computational Problems in Abstract Algebra* (J. Leech, editor), Pergamon Press, Oxford, 1970, pp.263-297.

[Lallement 1975] G. Lallement, Amalgamated products of semigroups: The embedding problem, *Trans.Amer.Math.Soc.* **206** (1975), 375-394.

[LeChenadec 1986] Ph. LeChenadec, *Canonical Forms in Finitely Presented Algebras*, Pitman, London and Wiley, New York, 1986.

[Lyndon and Schupp 1977] R.C. Lyndon and P.E. Schupp, *Combinatorial Group Theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1977.

[Magnus, Karrass and Solitar 1966] W. Magnus, A. Karrass and D. Solitar, *Combinatorial Group Theory*, Wiley, New York, 1966.

[Martin 1993] U.Martin, On the diversity of orderings on strings, Report CS 93/13, University of St. Andrews, Scotland, 1993.

[Newman 1942] M.H.A. Newman, On theories with a combinatorial definition of "equivalence", *Annals of Mathematics* **43** (1942), 223-243.

[Otto 1984] F. Otto, Finite complete rewriting systems for the Jantzen monoid and the Greendlinger group, *Theoret. Comut. Sci.* **32** (1984), 249-260.

[Pedersen and Yoder 1994] J. Pedersen and M. Yoder, Term rewriting for the conjugacy problem and the braid groups, *J.Symbolic Comput.* **18** (1994), 563-572.

[Preston 1976] G.B. Preston, Free products amalgamating unitary subsemigroups, *Bull. Austral. Math. Soc.* **15** (1976), 117-124.

[Rimlinger 1987] F.S. Rimlinger, A subgroup theorem for pregroups, in: *Combinatorial Group Theory and Topology*, Annals of Mathematics Studies, no.111, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1987, pp.163-174.

[Schreier 1927] O. Schreier, Die untergruppen der freien gruppen, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **5** (1927), 161-183.

[Schmidt 1968] J. Schmidt, Universelle halbgruppe, kategorien, freies produkt, *Math. Nachr.* **37** (1968), 345-358.

[Spehner 1973] J.-C. Spehner, Demi-groupes partiels et demi-groupes résiduellement finis, *C. R. Acad. Sci. Paris* **276A** (1973), 823-826.

[Stallings 1966] J.R.Stallings, A remark about the description of free products of groups, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **62** (1966), 129-134.

[Stallings 1971] J.R. Stallings, *Group Theory and Three-Dimensional Manifolds*, Yale Univ. Press, New Haven and London, 1971.

[Stallings 1987] J.R. Stallings, Adian groups and pregroups, in: *Essays in Group Theory*, Math. Sci. Res. Inst. Publ., vol.8, Springer-Verlag, New York, 1987, pp.321-342.

[Адян 1960] С. И. Адян, О вложимости полугрупп в группи, *Докл. АН СССР* **133** (1960), 255-257.

[Адян 1966] С. И. Адян, *Определяющие соотношения и алгоритмические проблеми для групп и полугрупп*, Наука, Москва, 1966; English translation: S. I. Adjan, *Defining Relations and Algorithmic Problems for Groups and Semigroups*, Proc. Steklov Inst. Math. vol. **85**, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1967.

[Лободина 1992] Л. В. Лободина, Полугрупповие вложения полугруппових амальгам общего вида с идеальними пересечениями, в сб. *Разбиения и гомоморфние отображения полугрупп*, (Е. С. Ляпин, редактор), Рос. гос. пед. унив. имени А. И. Герцена, С.-Петербург, 1992, стр. 88-99.

[Ляпин 1969] Е. С. Ляпин, Независимость подполугрупп полугруппи, *Докл. АН СССР*, **185** (1969), 1229-1231 ; English translation: E. S. Lyapin, The independence of subsemigroups of a semigroup, *Soviet Math. Dokl.* **10** (1969), 492-494.

[Ляпин 1970] Е. С. Ляпин, Пересечения независимих подполугрупп полугруппи, *Известия ВУЗ. Математика*, 1970, 4, стр. 67-73.

[Ляпин 1974] Е. С. Ляпин, Независимие полугрупповие продолжения частичних группоидов, в сб. *Современная алгебра*, в. 2 (Е. С. Ляпин, редактор), Ленингр. гос. пед. инст., Ленинград, 1974. стр. 55-71.

[Ляпин и Евсеев 1991] Е. С. Ляпин и А. Е. Евсеев, *Частичние алгебраические действия*, Рос. гос. пед. унив. имени А. И. Герцена, С.-Петербург, 1991.