# РЕЦЕНЗИЯ

на Николай Василев Живков,
професор в Институт по Математика и Информатика БАН

Относно материали по конкурс, обявен в ДВ бр. 33 от 11.04. 2014 г.
за заемане на академична длъжност професор
към Институт по Математика и Информатика при БАН
по направление 4.5. Математика (Математически анализ).

В конкурса за професор като единствен кандидат участва доцент д.м.н. Денка Николова Куцарова-Форд. Представените от доц. д.м.н. Куцарова документи съответстват на изискванията определени от Закона за Развитие на Академичния Състав в Република България и са изготвени собразно Правилниците за условията и реда за придобиване на научни степени и за заемане на академични длъжности на БАН и на Института по Математика и Информатика при БАН.

Денка Куцарова завършва висше образование през 1979 година във ФМИ, СУ, с пълно отличие, а през 1983 г. защитава кандидатска дисертация под ръководството на акад. Троянски. През 2008 година защитава дисертация за доктор на математическите науки, а от 1996 година до настоящия момент е доцент към ИМИ БАН.

Общият брой публикации на доц. Куцарова е 68, от които 24 са представени за участие в конкурса. От тях 11 работи не са включвани в предишни процедури. От представените работи всички, с изключение на две, са в съавторство с един или повече съавтори, като почти всички са в списания с импакт фактор. Сумарният импакт фактор на статиите за конкурса е 14.379 и те са публикувани в авторитетни издания като Canad. Math. Bull., J. Math. Anal. Appl., Studia Math., J. Fourier Anal. Appl., Duke Math. J., J. Funct. Anal., Constructive Approx., Proc. Amer. Math. Soc. и други.

Общият брой на цитиранията на всички публикации на Куцарова е 229, а на статиите за конкурса 170. Отбелязани са 3 цитирания на световни конгреси по математика и 11 цитирания в книги. Международната и дейност включва 9 покани като гост-професор, 17 покани в чуждестранни университети, 2 специализации по научен обмен, 32 изнесени доклади на международни конференции и 3 изнесени пленарни доклада. Преподавателската дейност включва по два курса на семестър от есента на 2001 година до сега във Факултета по Математика към Университета на Илинойс в Урбана-Шампейн, САЩ.

Научните изследвания на доц. д.м.н. Денка Куцарова са в областта на анализ в банахови пространства, а тя ги разделя на три основни тематични направления:

- структурни свойства на банахови пространства,
- геометрични свойства и приложения в нелинейния анализ,
- гриди (greedy) базиси и алгоритми.

В представените за конкурса публикации са включени и две работи с по-приложен характер относно

- явни конструкции на матрици за компресиращо отчитане.

Тематиката, касаеща структурни свойства на банаховите пространства е представена чрез публикациите 4, 5, 6, 7, 8, 13, 15, 16 и 20 от списъка на представените за конкурса статии, като три от тях, 7, 16 и 20 не са включвани в предишна процедура. Това е тематика, която е изключително застъпена в един по-ранен етап от изследователската дейност на Д. Куцарова.

Изследванията засягат най-общо казано свойства на банахови пространства със шаудеров базис. Един от въпросите, които се поставят за дадено пространство е дали то притежава безкрайномерно подпространство, което да е изоморфно на някое добре изучено пространство, като например $c_0$ или $l_p$. Цирелсон, през 1974 г., конструира пространство с безусловен базис, такова че никое негово подпространство не е изоморфно на $c_0$ или $l_p$. Тази конструкция мотивира по-нататъшни изследвания, като Гауърс и Море през 1993 г. построяват пространство, което не съдържа безусловна базисна редица.

Куцарова в статиите 5 и 8 използва нов оргинален метод, наречен по-късно в научната литература метод “yardstick” (метър за измерване), за построяване на подпространства, (в статия 8, съвместна с Пей-Ки Лин), които са равномерно изоморфни на n–мерното $l_\infty$ за произволно n. Тези две работи биват многократно цитирани, като първата е цитирана от Томчак-Ягерман на световния конгрес по математика през 1998 година..

В статия 15 е доказан следния резултат: Ако X е банахово пространство със силно асимптотичен $l_p$ базис, $1 \leq p < \infty$, и X е минимално, то X е изоморфно на подпространство на $l_p$. В публикации 16 и 20 се използват модифицирани цирелсонови пространства за построявани на нови примери на квази-минимални пространства.

В статиите 1, 2, 3, 22 и 24 (от списъка на публикациите за конкурса) се изследват геометрични свойства на изпъкналост и гладкост на единичните сфери на банахови пространства. Първите три от споменатите работи са представяни и на процедури за доцент и д.м.н.

Основно мото в тази тематика е влиянието на различните свойствата на гладкост и изпъкналост на единичната сфера на банаховото пространство върху другите свойства на пространството. Добре известен факт, дължим на Енфло, е че едно пространство е супер-рефлексивно, тогава и само тогава, когато то допуска еквивалентна равномерно изпъкнала норма, или другояче казано, тогава и само тогава, когато то има еквивалентна равномерно гладка норма. Друго, по-общо свойство на изпъкналост е въведената от Хъф почти равномерна изпъкналост (NUC), а Прус въвежда свойството на почти равномерна гладкост (NUS). Разглеждани от Милман, Джонсън, Линденщраус и други са свойства на асимптотична равномерна изпъкналост и асимптотична равномерна гладкост.

През 80-те години Ролевич въвежда едно геометрично свойство, наречено (β), което е междинно по отношение на равномерната изпъкналост и почти равномерната изпъкналост като използва, свойство на капката, за изучаването му. Капката е изпъкналата обвивка на единичното кълбо и точка не лежаща в него.

В статия 1 се характеризира изоморфно свойството (β) и се показва, че то е наистина междинно спрямо равномерната изпъкналост и (NUC). Оказва се, че едно сепарабелно банахово пространство има свойството (β), тогава и само тогава, когато то има еквивалентна норма, която е едновременно (NUC) и (NUS). За получаване на тези резултати се използва една еквивалентна дефиниция на (β) чрез разделени редици, представена в статия 3, която се явява удобен критерий за проверка на условието (β). В последствие, този критерий за проверка на свойството (β) се използва и цитира от много математици.

Съвместната работа 2, на Куцарова и Ролевич, обобщава свойството на капката за произволни изпъкнали и затворени множества и изучава различни свойства на капката. В статия 3, Куцарова въвежда нови свойства на изпъкналост, представени чрез две редици от свойства, които са между (β) и (NUC) и са означени от нея като к-бета и к-NUC. Тези свойства са изометрично различни, а за някои стойности на цялото число к се доказва и че са изоморфно различни.

Статиите 22 и 24 са посветени на свойството (β). В първата е показано, че компактно равномерната изпъкналост на пространството, използвана неотдавна в задачи от теория на апроксимациите съвпада със свойството (β). В тази работа са доставени и нови примери на пространства със свойството (β). В 24 се доказва, че ако едно банахово пространство Y е равномерно (нелинейно) фактор-пространство на банахово пространство X, то (β)-модулът на X се оценява отгоре с точност до константа от модула на асимптотичната равномерна гладкост на Y.

Публикациите 9, 10, 11, 12, 14, 17, 21, и 23 са посветени на гриди (greedy) базиси и алгоритми. Първите четири от споменатите работи са представяни на предишна процедура за д.м.н. Статия 12, описана под номер 53 от пълния списък, която е съвместна с Дилуорт и Калтон, не е включена на електронен носител към материалите за конкурса, като вместо нея присъства статия 47 (съвместна с Дилуорт), от пълния списък на публикациите, касаеща оптимално свойство на теорема на Елтон. Тази техническа грешка е повод да се препоръчва използване на единствен списък при позоваване на статиите.

Въпросите от споменатата проблематика имат тясна връзка с апроксимационните задачи и до голяма степен са продиктувани от тях, но същевременно представляват и теоретичен интерес, касаещ структурни свойства на банаховите пространства. За разлика от класическите апроксимации при които елементите се приближават с линейни комбинации от базисни елементи, тук се използват линейни комбинации от елементи, които не са базис, а са от по-общи множества, като например така наречените речници, които обобщават идеята за базис. При тези представяния се губи еднозначността, но това е обусловено от приложенията.

Разглеждат се въпроси за сходимост на алгоритми в банахови пространства спрямо общи речници. Такъв например е слабо чебишевия гриди алгоритъм (WCGA). Наименованието за слабост идва от използване на параметър, или редица от параметри, за определяне на допустимо отклонение, а самият алгоритъм е обобщение на ортогоналния гриди алгоритъм спрямо базис за хилбертови пространства. Резултат от статия 10 гласи, че ако X е рефлексивно сепарабелно банахово пространство, то в X има еквивалентна норма за която (WCGA) е сходящ за всеки речник и всеки елемент на пространството. В 14 е доказана сходимост на (WCGA) за класове от пространства и речници, като в частност резултатите включват пространствата на Бергман.

Статия на Конягин и Темляков дава начало на изследвания върху квази-гриди базиси и алгоритми както и на техни варианти в банахови пространства. В този дух са изследванията на Куцарова в работите 11 и 12. На световния конгрес по математика през 2006 г., Темляков включва в доклада си върху гриди апроксимации спрямо базиси и двете съвместни работи 10 и 11 с Куцарова. Любопитен резултат, следствие от изследванията в статия 12, е следното твърдение: Безкрайномерното банахово пространство X притежава единствен с точност до еквивалентност квази-гриди базис тогава и само тогава, когато X е изоморфно на $c_0$.

Работите 21 и 23 са посветени на изучаване на алгоритми от тип на Гогян. Разглежданията в първата са направени в по-абстрактна постановка, а във втората, която е съвместна с Гогян и Дилуорт се показва сходимост на модифициран (WCGA) относно многомерен базис на Хаар в многомерно $L_1$ пространство.

Една изключително актуална проблематика, имаща пряко отношение към приложенията е застъпена в работите 18 и 19, посветени на явни конструкции на матрици за компресиране на сигнали. Сигналът е N–мерен вектор, който се трансформира чрез линейно преобразование, т.е. чрез матрица, в n–мерен вектор, където $n \leq N$. За да е възможно възстановяване на първоначалния сигнал е необходимо само к на брой от компонентите му да са ненулеви, а компресиращата матрица да удовлетворява специално условие, наречено ограничено изометрично свойство. Това свойство може да бъде оприличено на локална почти ортогоналност, т.е. всеки к на брой вектор-стълбове на матрицата да са почти ортогонални. Такава матрица освен това дава възможност за лесно и бързо възстановяване на входящия вектор

Построяване на подобни матрици е правено от много автори като за целта са използвани както вероятностни методи така и детерминистични конструкции, но всичките те не дават по-добър порядък за к от $\sqrt{n}$. В статия 19, която продължава и надгражда изследванията от статия 18, се показа, че асимптотичната граница за порядъка на к е надхвърлена. Тези две работи намират широк отзвук, което се отразява и на многобройните им цитирания. Постигнатият резултат е впечатляващ и е плод на усилията на авторски колектив от специалисти в различни области на математиката.

В заключение ще отбележа, че нямам съмнения в личния принос на кандидатката за получените резултати и **изразявам положителна оценка** относно нейната кандидатура за заемане на **академичната длъжност професор към ИМИ БАН**. От предоставените документи, както и от дългогодишните ми наблюдения върху цялостната научна и преподавателска дейност на доц. Д. Куцарова се убеждавам, че тя е достойна да заеме тази длъжност. Това ми дава основание **да препоръчам на Научното жури да предложи на Научния Съвет на Института по Математика и Информатика при БАН избора на доц. д.м.н. Денка Николова Куцарова-Форд на академичната длъжност професор на ИМИ в област 4.5. Математика (математически анализ).**

15. 09. 2014

/проф. Николай Живков/