РЕЦЕНЗИЯ

По конкурс за академичната длъжност ПРОФЕСОР в ИМИ БАН
по научната специалност 01.01.04 – Математически анализ
с кандидат доц. дмн Денка Николова Куцарова
Рецензент: проф. дмн Румен Петров Малеев

1. Данни за кандидатката. Доц. дмн Денка Куцарова е завършила математика с пълно отличие във ФМИ на СУ през 1979 г. През 1983 г. под ръководството на проф. Троянски защитава кандидатска дисертация, озаглавена

Върху равномерната изпъкналост и диференцируемост по направление на нормата в банахови решетки.

През 1996 г. става ст.н.с. в ИМИ на БАН. През 2008 г. защитава „голяма“ докторска дисертация, озаглавена

Асимптотични и геометрични свойства на банаховите пространства.

В последните години работи в Университета на Илинойс в Урбана, САЩ.

2. Публикации. За конкурса доц. Куцарова е представила 24 (от общо 66 публикувани и 2 предложени за публикуване) научни статии. От тях 21 са в списаия с импакт фактор (сумарен фактор над 14), а 2 са в сборници от конференции в САЩ, публикувани в Lecture Notes in Pure and Applied Math. 175 и STOC'11. Почти половината (11) от статиите с общ импакт фактор 8.751 не са използвани в предишни процедури, като 7 от тях представляват изследвания след защитата на втората дисертация. От представените работи 2 са самостоятелни, 2 - с един съавтор, 10 - с двама съавтори и 10 – с повече от двама съавтори. Измежду съавторите на доц. Куцарова са такива водещи специалисти по теория на банаховите пространства и по анализ и апроксимации като Аргирос, Войташчик, Дилуорд, Калтон, Одел, Темляков, Троянски, Форд, Шлумпрехт и др. Две от представените статии, публикувани в последните години, са дело на колектив, в който участва филдсовският медалист за 1994 г. Ж. Бурген. Доц. Куцарова е представила и списък с 11 монографии, 3 Сборника от Международни Математически конгреси, както и над 200 научни статии (преобладаващо в списания с импакт-фактор), в които нейни публикации са цитирани повече от 300 пъти**.**

3. Авторската справка подробно и вярно отразява както приносите на авторката, така и тяхното място в потока на съвременните изследвания в областта.

4. Научни приноси. Основните интереси и резултатите, получени от доц. Куцарова, са в областта на геометрията на банаховите пространства. Изследванията на доц. Куцарова в представените за конкурса публикации могат условно да се разделят на 3 групи, съответстващи на три направления в теорията на банаховите пространства: геометрични свойства; структурни свойства; приложения основно в теоретичната обосновка на методи за пренос и възстановяване на сигнали - гриди апроксимации и алгоритми, матрици за компресиращо отчитане. По-долу ще разгледаме поотделно трите групи, като ще използваме номерата според списъка на представените за конкурса статии.

Геометричнн свойства. През 70-те и 80-те години много изследвания бяха посветени на линейно-топологичните свойства на банаховите пространства и тяхната връзка със свойствата на различни метрични характеристики. Класически пример на такава връзка е известният резултат на Джеймс-Енфло, според който едно банахово пространство е суперефлексивно тогава и само тогава, когато притежава еквивалентна равномерно изпъкнала (равномерна гладка) норма. Традиционно много изследвания бяха насочени към въвеждането и изучаването и на други, различни от равномерната изпъкналост и равномерната гладкост, геометрични характеристики на единичната сфера, както и на приложения на банаховите пространства в теорията на апроксимациите, оптимизациите, теорията на операторите и нелинейния анализ, математическата логика.

В по-ранните работи 1, 2 и 3 на доц. Куцарова се разглеждат геометрични свойства на нормата като почти равномерна изпъкналост (ПРИ), почти равномерна гладкост (ПРГ) и свойството (β), които са по-слаби от равномерната изпъкналост и гладкост и наличието им поставя съответното банахово пространство между рефлексивните и суперрефлексивните пространства. Получена е характеризация на свойството (β) за пространства с базис, което се оказва еквивалентно на съществуването на еквивалентна норма, която е едновременно ПРИ и ПРГ. Въведени са и две редици от свойства на изпъкналост, пласиращи съответните пространства между тези с ПРИ норма и тези с норма, притежаваща свойството (β). Свойството на капката, въведено от Ролевич за единичното кълбо, е разгледано по-общо за произволни затворени изпъкнали множества и е доказано, че ако едно затворено изпъкнало множество в банахово пространство притежава свойството на капката , то е или компактно или има непразна вътрешност. Ще отбележим, че свойството на капката е използвано от различни автори при изследване на въпроси, свързани с добра поставеност на оптимизационни задачи. По-финни от беровите категории оценки за „тънкостта“ на допълненията на множествата на апроксимативна компактност в задачата за метрическата проекция бяха получени в последните години в нововъведения клас на компактно равномерно изпъкналите банахови пространства. В работа 22 се доказва, че свойството (β) и компактната равномерна изпъкналост са изометрично еквивалентни. Намерената от доц. Куцарова в работа 3 характеризация на банаховите пространства X с β-свойството позволява въвеждането на подходящ модул $\bar{\beta}_X$ за тези пространства. В статия 24 се доказва, че ако Y е равномерно факторпространство на X, т.е. съществува сюрективно изображение $T: X \to Y$, което е равномерно и ко-равномерно непрекъснато, то модулът $\bar{\beta}_X$ се оценява отгоре (с точност до константи) чрез модула на асимптотична равномерна гладкост

$$\bar{\rho}_Y(t) = sup_{x \in S_X}\{inf_{dim X/Y < \infty}\{sup_{y \in S_Y}\|x + ty\| - 1\}\}$$

на Y. В известен смисъл получената оценка е оптимална.

Структурни свойства. В последните 25 години ново развитие получи локалната теория на банаховите пространства, свързана с количествено изучаване на n-мерните нормирани пространства от една страна и с изследване на връзката между структурата на безкрайномерните банахови пространства и техните крайномерни подпространства от друга страна. Бяха получени и редица впечатляващи резултати, решаващи основни задачи от структурната теория и определящи в известен смисъл границите на теорията на банаховите пространства. Класически структурен въпрос е дали дадено банахово пространство притежава подпространство, изоморфно на пространство с "хубави" или добре изучени свойства като например редичните пространствата $c_0, l_p, 1 \le p < \infty$. За крайномерни подпространства тази задача се решава положително от класическите теореми на Дворецки и Кривин. След построяването на безкрайномерно пространство с безусловен базис, което не съдържа подпространства, изоморфни на $c_0, l_p, 1 \le p < \infty$ от Цирелсон през 1974 г. следващият естествен въпрос беше дали всяко банахово пространство притежава безусловна базисна редица или, което е същото - подпространство с безусловен базис. Прогресът при решаването на тази задача минава през установяването от Одел на факта, че пространството $\boldsymbol{T}$ на Цирелсон (всъщност спрегнатото на построеното от Цирелсон) е дисторцируемо (изкривяемо)[1]. От Джеймс е известно, че c_0.и l_1 не са дисторцируеми. През 1991 г. Шлумпрехт конструира произволно дисторцируемо (дисторцируемо за произволно $\lambda > 1$) банахово пространство $\boldsymbol{S}$. Макар естественият базис на $\boldsymbol{S}$ да е безусловен пространството на Шлумпрехт послужва за основа на построеното от Гауърс и Море през 1993 г. пространство $\boldsymbol{GM}$, което не притежава безусловна базисна редица. Нещо повече $\boldsymbol{GM}$ е наследствено неразложимо (НН), т.е. неговите безкрайномерни затворени подпространства не допускат представяне като директна сума на безкрайномерни затворени подпространства. Пространството $\boldsymbol{GM}$ е с много „бедна" структура, т.е. с „бедно" пространство $L(\boldsymbol{GM})$ от линейни ограничени оператори, всеки от които е от вида $\lambda I + S$, където λ е константа, I е идентитетът, а S е строго сингулярен. Също през 1994 г. Одел и Шлумпрехт решават проблема за дисторцията, като показват в частност, че хилбертовото пространство l_2 е дисторцируемо за произволно $\lambda > 1$. Наскоро (2011) Аргирос и Хейдън построиха в известен смисъл „най-лошото" засега пространство $\boldsymbol{AH}$, което е почти лишено от структура - всеки ограничен линеен оператор от $L(\boldsymbol{AH})$ е от вида $\lambda I + K$, λ е константа, а K - компактен оператор[2], откъдето следва, че в $\boldsymbol{AH}$ няма безусловни базисни редици. Към този кратък

[1] Едно пространство X се нарича λ-дисторцируемо, $\lambda > 1$, ако в X съществува еквивалентна норма $|\bullet|$, за която $\sup\{|y|/|z| : y, z \in Y, \|y\| = \|z\| = 1\} > \lambda$ за всяко безкрайномерно затворено подпространство Y на X .

[2] Всеки компактен оператор е строго сингулярен, но обратното в общия случай не е вярно.

преглед на най-важните резултати от структурната теория, ще добавим, че основните пространства на Цирелсон и Шлумпрехт и техни модификации, които са в основата на всички резултати, са попълнения по непрекъснатост на пространството от редиците с краен носител относно подходяща норма. Нормите се въвеждат като неявно решение на подходящо уравнение, което прави работата с тях много трудна и съответните конструкции и доказателства - достатъчно сложни. В последните години много изследвания са посветени на изучаване на различни модификации на пространствата на Цирелсон и Шлумпрехт пространства, които водят до получаването на нови класове банахови пространства, запълващи все по-детайлно класификатора на банаховите пространства, започнат от Гауърс. Дори само разучаването на тази тематика изисква огромни по обем и дълбоки познания от функционалния анализ, комбинаториката и математическата логика.

Интересни резултати са получени от доц. Куцарова при изследването на асимптотичното поведение на банаховите пространства чрез използването на спрединг модели и изследване на асимптотичната структура на тези пространства. Един от основните ѝ приноси е предложеният нов метод за конструиране на подпространства, равномерно изоморфни на l_∞^n за произволни n. Аналогична конструкция е предложена независимо и от Пей-Ки-Лин и е публикувана в съвместната статия 8 на двамата автори. В литературата конструкцията е известна като „ярдстик”. Използвайки „ярдстик” за l_∞^n Куцарова и Пей-Ки-Лин показват в 8, че шлумпрехтовото пространство ***S*** има блок-базис със спрединг модел еквивалентен на естествения базис в l_1. На базата на ***S***, като се използват методи на комплексна интерполация в 4 се показва, че съществува суперрефлексивно допълняемо минимално пространство, което не съдържа подпространства, изоморфни на $c_0, l_p, 1 \leq p < \infty$. Банаховото пространство ***X*** се нарича минимално (допълняемо минимално), ако всяко негово затворено безкрайномерно подпространство ***Y*** съдържа на свой ред подпространство ***Z***, изоморфно на ***X*** (и допълняемо в ***X***). Ще отбележим, че шлумпрехтовото пространство е също допълняемо минимално, но е само рефлексивно. От друга страна полученият резултат усилва резултат и на Фигел и Джонсън, които построяват първото суперрефлексивно пространство, което не съдържа изоморфни копия на $c_0, l_p, 1 \leq p < \infty$. В статията 6 се показва, че съществува сепарабелно пространство ***X*** (***X*** е подпространство на пространството ***GM*** на Гауърс-Море), което не притежава шаудерово разлагане, с което се решава проблем поставен още през 1968 г. от Редърфорд.

В работите на доц.Куцарова се изследва структурата на някои класове асимптотични и силно асимптотични l_p банахови пространствата. Ще припомним, че едно банахово пространство с базис се нарича асимптотично $l_p, 1 \leq p \leq \infty$, ако съществува константа C>0 такава, че всяка нормирана блок-базисна редица $(x_i)_1^n$ от елементи $supp\, x_1 \geq$n , е C-еквивалентна на естествения базис в l_p^n [3]. Получените резултати оборват очакванията, че тези пространства могат да имат добра локална структура. С помощта на “ярдстик” конструкцията се показва, че съществува смесено цирелсоново l_1 асимптотично пространство $\boldsymbol{X}$, което е не само произволно дисторцируемо, но е наситено с равномерни копия на l_n^{∞}. В работа 5 се въвежда и нов клас от пространства, наречени от авторите модифицирани смесени цирелсонови пространства (МСЦП). При подходящ избор на параметрите на конструкцията МСЦП са асимптотични l_1 и не само не са изоморфни на съответните смесени такива, но и никое тяхно подпространство не е изоморфно на подпространство на съответното смесено цирелсоново пространство. Даден е и пример на произволно дисторцируемо смесено цирелсоново пространство и негова модификация, която представлява наследствено неразложимо пространство. В работа 15 е доказано, че всяко минимално l_p силно асимптотично банахово пространство е изоморфно на подпространство на l_p за $1 \leq p < 2$, а за $p > 2$ базисът е просто еквивалентен на единичния базис в l_p или в c_0 при $p = \infty$. В 13 се въвеждат асимптотично симетрични пространства и е намерено достатъчно условие за съществуване на асимптотично l_p базисни редици в термините на асимптотичната структура на пространството. В 16 се изследват за свойства на минималност класове от МСЦП. Едно банахово пространство $\boldsymbol{X}$ се нарича квази-минимално, ако всеки 2 негови безкрайномерни пространства Y, Z съдържат съответни подпространства Y_1, Z_1, които са изоморфни помежду си. Намерени са достатъчни условия за субредична минималност[4] на класове квази-минимални (частично) МСЦП. В 20 се доказва секвенциална минималност (по-строго изискване за минималност от квази-минималност) за класове МСЦП и са представени примери на строго сингулярни некомпактни оператори в подпространства на смесени цирелсонови пространства.

Приложения. В изследванията на доц. Куцарова са изучавани гриди базиси и гриди апроксимации в банахови пространства (обикновено от функции), както относно речници, така и спрямо базис в съответното пространство. Ще припомним, че речник в банаховото пространство X се нарича всяка нормирана симетрична относно нулата (допълнително изискване за удобство при работа) система от елементи на X, чиято затворена линейна обвивка съвпада с X. Очевидно всеки базис поражда речник, но представянето чрез ред по елементите от речника не е задължително еднозначно, тъй като системата е с излишък. Разгледани са няколко гриди алгоритма за приближение. В най-прост вариант на Слабия

---

[3] Пространството се нарича силно асимптотично l_p, ако описаното свойство е налице за всеки набор от n нормирани вектори $(x_i)_1^n$ с непресичащи се носители, $supp\ x_i \geq n,\ i = 1,2,\dots,n$.

[4] Едно банахово пространство с базис $(x_i)_1^{\infty}$ се нарича субредично минимално, ако всяко негово подпространство съдържа подпространство, изоморфно на породеното от подредица на $(x_i)_1^{\infty}$.

чебишовски гриди алгоритъм (СЧГА) за апроксимация на функцията f на m-тата стъпка отначало се избира елемент φ_m от речника (базиса) такъв, че $F_m(\varphi_m) \geq t \sup_{g \in D} F_m(g), t \in (0,1)$, където F_m е опорният функционал на разликата $f - G_{m-1}$ (G_{m-1} е апроксимацията на $m-1$-та стъпка), а t е параметър, след което се избира най-доброто (в определен смисъл) приближение G_m на f с линейна комбинация на $(\varphi_i)_1^m$. В 10 се доказва, че за сходимост е достатъчно пространството да е рефлексивно с гладка по Фреше норма със свойството на Кадец-Кли, което е отслабване на обикновено изискваната равномерна гладкост, т.е. суперрефлексивност. Така лесно се получава, че във всяко рефлексивно сепарабелно банахово пространство за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $(1+\varepsilon)$-еквивалентна норма $|\bullet|$ такава, че СГАЧ е сходящ в $(X, |\bullet|)$ за произволна функция и за всеки речник. Получени са резултати за гриди и квази-гриди базиси, от които ще отбележим най-важните по наше мнение. Един базис се нарича гриди, ако съществува константа $C > 0$ такава, че гриди апроксимацията G_m от ред m , т.е. сумата на първите m, по големина на абсолютната стойност на коефициента в представянето на даден елемент, членове от това представяне е сравнима с най-доброто приближение с m елемента на базиса или:

$$\|x - G_m\| \leq C \inf \left\{ \left\| x - \sum_{j \in A} \alpha_j e_j \right\| : |A| = m, \alpha_j \in R \right\}.$$

Базисът е квази-гриди, ако за някое $C > 0$ е в сила $\|G_m(x)\| \leq C\|x\|$ за всяко x и всяко натурално m. Войташчик е доказал, че квази-гриди свойството е еквивалентно на сходимост на гриди апроксимациите към апроксимирания елемент, т.е. $\lim G_m(x) = x, \forall x \in X$. В 11 доц. Куцарова доказва, че ако банахово пространство с нетривиален тип притежава гриди базис, то биортогоналната система на базиса представлява гриди базис в спрегнатото пространство. Друг резултат (работа 12), обобщаващ резултат на Войташчик, представлява достатъчно условие за съществуване на квази-гриди базис – банахово пространство с базис, което притежава допълняемо подпространство със симетричен базис, което не е изоморфно на c_0, има квази-гриди базис. В частност $L_1(0,1)$ притежава квази-гриди базис. Следният резултат дава обяснение за изключването на c_0: c_0 притежава единствен с точност до еквивалентност квази-гриди базис, който всъщност е естественият базис. В 14 е доказана сходимост на т.н. X – СЧГА за „хубави“ речници в сравнително широк клас от реални и комплексни пространства, а в 17 – слаба сходимост на X – СЧГА за общи речници в равномерно гладки пространства $\boldsymbol{X}$ с норма, удовлетворяваща слабо нулевото свойство ($wlim x_n = 0$ всеки път, когато $w \lim x_n^* = 0$ в $\boldsymbol{X}^*$, където x_n^* е нормиращ функционал за x_n). В работа 21 за банахови пространства с базис на Маркушевич се въвеждат и изследват „клонови“ гриди алгоритми, зависещи от избора на клона от дървото от възможни избори на коефициентите, породено от избраното условие от тип слаб праг. Сходящи многомерни гриди алгоритми за многомерния базис на Хаар в $L_1\,[0,1]^d, d > 1$ са намерени в 23 и е показано, че гриди апроксимантите са равномерно ограничени. В работи 18 и 19 са дадени явни конструкции на *RIP* матрици за „компресиращо отчитане“, използвани при възстановяване на разредени сигнали. Един сигнал $(x_j)_1^N \in R^N$ се нарича k-разреден, ако има най-много k координати различни от 0. Казваме, че $n \times N$ матрицата $\boldsymbol{\Phi}$ притежава „свойството на ограничената изометрия“ (по-нататък *RIP* матрица) от ред k с константа δ, ако за всеки k-разреден вектор x евклидовите норми на x и Φx удовлетворяват неравенствата

$$(1-\delta)\|x\|^2 \leq \|\Phi x\|^2 \leq (1+\delta)\ \|x\|^2.$$

Естествената задача при фиксирани n и N, $n \ll N$, е да се намери *RIP* матрица $\boldsymbol{\Phi}$ с максимално k. Нелсън и Темляков са доказали, че $k \ll \delta \frac{n}{\log(N/n)}$, като оптималният порядък се достига с голяма вероятност например за матрици с елементи независими случайни бернулиеви величини със стойности $\mp 1/\sqrt{n}$. Явни конструкции на *RIP* матрици са от голям практически и теоретичен интерес. Всички известни до работа 19 конструкции, се базират на теория на числата и представляват матрици със стълбове l_2-единични вектори $\{u_j\}_1^N$, образуващи система с малка кохеренхтност $\mu = \max_{r\neq s}|\langle u_r, u_s\rangle|$. Постигнатият порядък за k е $\frac{\sqrt{n}log\, n}{logN}$. Нещо повече - за k не могат да се получат по-добри оценки от $\sqrt{n}$ с помощта на на оценки в термините на индекса на кохерентност μ. В 18 се предлага нова явна конструкция на $n \times N$ *RIP* матрица, за която се доказва оценка $n = o(k^2)$, с което се преодолява естествената бариера $k = O(\sqrt{n})$, действаща за всички известни доказателства, използващи кохерентност. За получаването на такъв сериозен пробив са използвани много тънки оценки от областта на адитивната комбинаторика. Работа 19, публикувана като разширено резюме на доклад, представящ резултатите от 18 на престижна конференция по компютърни науки STOC’11, съдържа съществени подобрения в оценките, което се отразява най-вече на константите в основния резултат.

5. Лични впечатления. Познавам доц. Куцарова от времето на нейната докторантура. Тя е човек изцяло отдаден на математиката, с огромна амбиция и желание за работа. Получените от нея резултати са и донесли заслужено признание на водещите специалисти в тези области.

Заключение. Представените за конкурса публикации съдържат многобройни и интересни резултати в едни от най-динамичните области на теорията на банаховите пространства през последните 20-30 години, за получаването на които са били необходими сериозни математически умения и сръчност. Те представят доц. Куцарова като сериозен учен с изграден авторитет у нас и в чужбина. Считам, че тя има качества за позицията на професор по математика във всяко учебно заведение и научна институция. Ето защо препоръчвам убедено на уважаемия НС на ИМИ на БАН избере доц. дмн Денка Николова Куцарова ПРОФЕСОР по математика.

София 23.09.2014 г. Рецензент: Р. Малеев