ИНСТИТУТ ПО МАТЕМАТИКА И
ИНФОРМАТИКА ПРИ БАН

Детелина Кирилова Камбурова

Вариационни принципи за supinf задачи с ограничения и равновесие в некооперативни игри

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

на дисертация за образователна и научна степен
доктор
докторска програма Изследване на операциите

Научен ръководител:
акад. Юлиан Ревалски

София, 2022 г.

За изучаване на олигополистичните пазари се използват два основни модела - йерархичен модел (Stackelberg) и нейерархични модели (Cournot (1838) [5] и Bertrand (1883) [3]). При нейерархичните модели фирмите влизат на пазара едновременно. Cournot предполага, че фирмата избира предварително количеството продукция, което ще предложи на пазара. Цената на стоката се определя от общото количество продукция на пазара и е еднаква за всяка фирма. Най-често обаче фирмите влизат последователно на пазара и тогава се прилага йерархичния, двустъпков модел на Stackelberg (1934), [28]. Участниците се конкурират с произведеното количество. Една от фирмите (водещата) първа избира количеството, което ще предложи на пазара. Впоследствие другата фирма (последователят) оптимизира функцията си на печалба в зависимост от стратегията на лидера.

В тази дисертация са представени, както резултати свързани с пазарно равновесие, така и резултати в областта на вариационния анализ, чието изучаване е продиктувано от нуждите на икономическото моделиране. Състои от увод, три глави и заключение.

Уводът въвежда в тематиката и представя най-общо актуалното състояние на изследванията в областта.

Глава 1 е посветена на хомогенен олигопол на Cournot с (-1)-вдлъбната ценова функция. Много резултати в литературата гарантират съществуването на единствено равновесие на Cournot. Един от първите резултати е на Murphy et al. (1982) [22], и предполага вдлъбнатост на функцията на приходите и изпъкналост на функцията на разходите. Amir (1996) [2] разглежда модела на Cournot в случая на логаритмично вдлъбната ценова функция $p(q)$. Murphy et al. [22] прилагат техниките на изпъкналото оптимиране, а Amir [2] използва резултати от теорията на супермодулярните игри.

Бивдлъбнатост е условие върху ценовата функция, което съответства на вдлъбнатост след едновременна параметризация на цената и количеството. Ценовата функция $p(q)$ е (α, β) - бивдлъбната, ако $\varphi_\alpha(p(q))$ е вдлъбната по $\varphi_\beta(q)$, където $(\varphi_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ е фамилия от трансформации. Ewerhart (2014) [10], използва това понятие, за да анализира модела на Cournot. Теоремата за съществуване в тази статия допуска стойности на α в интервала $[0,1]$ в негладкия случай и в интервала $(-\infty,0)$ в случая на двукратно диференцируема функция.

von Mouche и Quartieri (2013) [26] въвеждат понятието изпъкнала интегрирана ценова гъвкавост (convex integrated price flexibility) и извеждат резултати, свързани със съществуване и единственост на равновесие по Cournot. Разработената от тях техника прилагат за по-леко и директно доказателство на резултата на Murphy et al. (1982) [22].

В първата глава на дисертацията се разглежда клас от хомогенни олигополи на Cournot в случая на (-1)-вдлъбната ценова функция. Изведени са свойства на функцията на печалбата, които се прилагат за доказване на съществуване на равновесие в непрекъснатия и недиференцируем случай и единственост в гладкия случай с $(-1/N)$-вдлъбната ценова функция, където N е броят фирми на пазара.

Разходите на всяка фирма за производството на количеството $x_i \geq 0$, $i = 1, ..., N$ са означени с $c_i(x_i)$. Пазарната цена $p(x)$ е функция на общото производство $x_1+...+x_N$. Ако X_i е множеството от стратегии на играча i, тогава $X = X_1 \times ... \times X_N$, а x_{-i} елемент от множеството $X_{-i} = \prod_{k\in n, k\neq i} X_k$, $i = 1, ..., N$. Нека $\widetilde{N} = \{1, ..., N\}$. Тогава печалбата на i-тата фирма е

$$f_i(x_i, x_{-i}) = x_i p\left(x_i + \sum_{j\in\widetilde{N}, j\neq i} x_j\right) - c_i(x_i).$$

Множеството от всички положителни числа е означено с $\mathbb{R}_{>0}$, а с $\mathbb{R}_{\geq 0}$ - множеството от неотрицателните числа. Сума на Nash е функцията σ : E $\rightarrow \mathbb{R}$, където E е множеството от точки на равновесие $e = (e_1, ..., e_N)$. Тя съпоставя на всяка равновесна точка

e сумата от нейните координати, $\sigma(e) = \Sigma_{i=1}^{N} e_i$.

Преходът от квазивдлъбнатост към вдлъбнатост се прави, като се въведе понятието за обобщена вдлъбнатост.

Дефиниция 1 *(Shapiro et al. (2021) [25]) Функция $p : \Omega \to \mathbb{R}_{>0}$ дефинирана върху изпъкнало подмножество на линейно пространство се нарича α-вдлъбната, където $\alpha \in [-\infty, +\infty]$, ако за всички $x, y \in \Omega$ и всяко $\lambda \in [0, 1]$ следните неравенства са изпълнени:*

$$p(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq m_\alpha(p(x), p(y), \lambda),$$

където $m_\alpha : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0} \times [0,1] \to R$ се дефинира като:

$$m_\alpha(a, b, \lambda) := \begin{cases} a^\lambda b^{1-\lambda}, & \text{ако } \alpha = 0 \\ \max\{a, b\}, & \text{ако } \alpha = \infty \\ \min\{a, b\}, & \text{ако } \alpha = -\infty \\ (\lambda a^\alpha + (1-\lambda) b^\alpha)^{1/\alpha}, & \text{в противен случай.} \end{cases}$$

От лемата по-долу следва, че всяка функция, която е α-вдлъбната е и β-вдлъбната за $\alpha \geq \beta$.

Лема 2 *(Shapiro et al. (2021) [25]) Изображението $\alpha \to m_\alpha(a, b, \lambda)$ е ненамаляващо и непрекъснато.*

Разгледани са $(-1/n)$-вдлъбнатите функции, $n \geq 1$:

Дефиниция 3 *Функция $p : \Omega \to \mathbb{R}_{>0}$ дефинирана върху изпъкнало подмножество на линейно пространство се нарича $(-1/n)$-вдлъбната, $n \geq 1$, ако за всяко $x, y \in \Omega$ и всяко $\lambda \in [0, 1]$ е изпълнено неравенството:*

$$p(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq (\lambda(p(x))^{-1/n} + (1-\lambda)(p(y))^{-1/n})^{-n}.$$

В Параграф 1.2 на Глава 1 са изведени свойства на функцията на печалбата в случай на (-1)-вдлъбната ценова функция, с помощта на които се доказват съществуване и единственост на равновесие по Cournot-Nash.

Теорема 4 *Нека функцията $p : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{>0}$ е строго намаляваща, непрекъсната и $(-1/n)$-вдлъбната, $n \geq 1$ и нека $k \geq 0$. Ако функцията $xp(x+k)^{1/n}$ е строго растяща в интервал $\Omega \subseteqq \mathbb{R}_{\geq 0}$, то тя е $xp(x+k)^{1/n}$ е строго вдлъбната в същия интервал.*

Теорема 5 *Нека $p : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{>0}$ е строго намаляваща, непрекъсната и $(-1/n)$-вдлъбната функция, $n \geq 1$ и нека $k \geq 0$. Тогава, ако функцията $xp(x+k)^{1/n}$ има екстремум по-голям от 0, той е глобален максимум.*

Следствие 6 *Нека $p : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{>0}$ е строго намаляваща, непрекъсната и $(-1/n)$-вдлъбната функция, $n \geq 1$, $k \geq 0$ и нека $c : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ е изпъкнала и растяща функция. Тогава функцията $xp(x+k)^{1/n} - c(x)$ е квазивдлъбната.*

Да забележим, че съществуването на лява и дясна производна във всяка точка от $\mathbb{R}_{>0}$ за положителна (-1)-вдлъбната функция p следва от това, че нейната реципрочна $1/p$ е изпъкнала и от свойствата на изпъкналите функции.

Следствие 7 *Нека $p : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{>0}$ е строго намаляваща, непрекъсната и $(-1/n)$-вдлъбната функция, $n \geq 1$. Ако $0 < x_1 < x_2$, $k \geq 0$, $1 \leq s \leq n$, тогава от $x_2 d^- p(x_2+k) + sp(x_2+k) > 0$, следва че $x_1 d^+ p(x_1+k) + sp(x_1+k) > x_2 d^- p(x_2+k) + sp(x_2+k)$.*

Параграф 1.3 на Глава 1 е посветена на съществуване и единственост на равновесие по Cournot-Nash.

Теорема 8 *Нека всяка функция на разходите $c_i : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $i \in \tilde{N}$, е непрекъсната, изпъкнала и строго растяща, а $p : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{>0}$ е строго намаляваща, непрекъсната и (-1)-вдлъбната функция. Тогава съществува поне една точка на равновесие по Cournot-Nash.*

Теорема 8 следва от Следствие 6 и Теоремата на Debreu-Glicksberg-Fan за съществуване на равновесие в компактни и квазивдлъбнати игри с непрекъснати функции на печалбата. Компактността на играта е следствие от това, че ефективните стратегии на всяка от фирмите се получават в ограничен интервал.

За доказателството на Теорема 9 е използван подходът разработен от von Mouche и F. Quartieri в [26].

Теорема 9 *Предполагаме, че всяка функция на разходите* $c_i : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$*,* $i \in \tilde{N}$*, е строго изпъкнала и растяща, а* $p : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{>0}$ *е строго намаляваща, непрекъсната и* $(-1/N)$*-вдлъбната функция,* $N \geq 2$*. Тогава сумите на Nash* σ *са константни.*

Директно следствие от Теорема 1 от [26], Теорема 9 и Теорема 8 е

Следствие 10 *Предполагаме, че всяка функция на разходите* $c_i : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$*,* $i \in \tilde{N}$ *е непрекъсната, строго изпъкнала и растяща, а* $p : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{>0}$ *е строго намаляваща, непрекъсната, диференцируема,* $(-1/N)$*-вдлъбната функция. Тогава съществува единствена точка на равновесие.*

В основата на модела на Stackelberg за дуопол е двустъпковата оптимизация. Състои се от решаването на две оптимизационни задачи - на лидера и на последователя. Водещият играч (лидерът) прави своя избор първи с цел да максимизира печалбата си. Той трябва да вземе предвид стратегията на втория играч (последователя). Ако играта е кооперативна, предполагаме, че последователят избира в полза на лидера и се решава така наречената оптимистична двустъпкова задача. Ако играта е некооперативна, лидерът трябва да се предпази от възможно най-лошата за него ситуация. **Глава 2** е посветена на inf и supinf задачите с ограничения. Едно от приложенията на supinf задачите е намиране на гарантираната печалба, която водещият играч може да си осигури дори и при най-неизгоден за него ход от страна на последователя. Тяхната най-обща формулировка е следната

$$(P) \qquad \sup_{x \in X} \inf_{y \in Kx} f(x,y),$$

където X и Y са напълно регулярни топологични пространства, $f : X \times Y \to [-\infty, \infty]$ е разширена реалнозначна функция, а $K : X \rightrightarrows Y$ е многозначно изображение с непразни образи. В игрите от типа "водач-последовател" пространството от стратегии на водещия играч е X, а последователят избира от $K(x)$. Печалбата на лидера се дава от функцията f. Задачата на Stackelberg е частен случай на supinf задачаите, за които $K(x) = \operatorname{argmax} \{k(x,y), y \in Y\}$, където k е дадена функция.

Очевидно е, че без допълнителни предположения за функцията f, за пространствата X и Y, както и за многозначното изображение K, задачата (P) може да няма решение. Главната цел на тази глава е да се намерят условията, които позволяват пертурбации на функцията f с подходящи непрекъснати функции по такъв начин, че задачата (P) за смутената функция да има решение. Такъв тип резултати са известни в оптимизацията като вариационни принципи за съответния клас от задачи. Резултати за функции на две променливи са получени от McLinden в [21] (като се използва вариационният принцип на Ekeland [9]) и в случай на supinf задача без ограничения (т.е. когато $K(x) = Y$ за всяко $x \in X$) от Kenderov и Revalski в [20]. Вариационни принципи за някои класове оптимизационни задачи с ограничения са получени от Ioffe et al. в [14].

Нека Z е напълно регулярно топологично пространство. Пространството от всички непрекъснати, ограничени, реалнозначни функции дефинирани върху Z е означено с $C(Z)$. В Параграф 2.2 на Глава 2 е изведен един вариационен принцип за inf задачи с ограничения. Той се използва в доказателството на supinf вариационния принцип с ограничения. С негова помощ са доказани и вариационния принциип на Ekeland и Теоремата на Caristi в пълни метрични пространства.

Лема 11 *Нека $h : Z \to (-\infty, +\infty]$ е собствена и полунепрекъсната отдолу функция, дефинирана в напълно регулярно топологично пространство Z. Нека A е затворено подмножество на Z, $A \cap \operatorname{dom}(h) \neq \emptyset$ и h е ограничена отдолу върху A. Ако*

$z_0 \in A \cap \mathrm{dom}(h)$ и $\varepsilon > 0$ са такива, че $h(z_0) < \inf_{\mathrm{A}} h + \varepsilon$, то съществува непрекъсната ограничена функция $g : Z \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $g(z_0) = 0$, $||g||_{Z,\infty} \leq \varepsilon$ такава, че функцията $h + g$ достига минимума си върху A *в z_0. Допълнително, g може да бъде избрана такава, че $||g||_{Z,\infty} = h(z_0) - \inf_A h$.*

За функцията $f : X \times Y \to [-\infty, +\infty]$ и изображението $K : X \rightrightarrows Y$ са направени предположенията:

(П1) $f : X \times Y \to [-\infty, +\infty]$ е полунепрекъсната отгоре за $(x, y) \in X \times Y$;

(П2) $K : X \rightrightarrows Y$ е полунепрекъснато отдолу в X многозначно изображение със затворени непразни образи;

(П3) функцията $v(\cdot) := \inf_{y \in K(\cdot)} f(\cdot, y)$ е ограничена отгоре в X и е собствена като функция със стойности в $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$;

(П4) за всяко $x \in X$ функцията $f(x, \cdot)$ е полунепрекъсната отдолу в Y.

В Параграф 3.3 на Глава 2 е доказан вариационен принцип за supinf задачи с ограничения. Той показва, че можем да направим произволно малко смущение на функция на две променливи, която заедно с изображението K удовлетворява предположенията (П1)-(П4), по такъв начин, че supinf задачата да има решение за смутената функция. Разглежданото смущение е разлика на непрекъснати функции, дефинирани съответно в Y и X. Доказателството следва това на Твърдение 2.6 от [20], където разгледаният случай е без ограничения.

Теорема 12 *Нека $f : X \times Y \to [-\infty, +\infty]$ е функция, която заедно с многозначното изображение K удовлетворява предположенията от* (П1) *до* (П4)*. Нека $\varepsilon > 0$ и $x_0 \in X$ са такива, че $v(x_0) > \sup_{x \in X} v(x) - \varepsilon$ и нека $\delta > 0$ и $y_0 \in K(x_0)$ са такива, че $f(x_0, y_0) < \inf_{y \in K(x_0)} f(x_0, y) + \delta$. Тогава, съществуват непрекъснати ограничени функции $q : X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ и $p : Y \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, такива,* *че*

$$q(x_0) = p(y_0) = 0,\ ||q||_{X,\infty} \le \varepsilon,\ ||p||_{Y,\infty} \le \delta$$

и supinf задачата

$$\sup_{x \in X} \inf_{y \in K(x)} \{f(x,y) - q(x) + p(y)\}$$

има решение (x_0, y_0).

Забележка 13 *Ако функцията* $f : X \times Y \to [-\infty, +\infty]$ *и многозначното изображение* $K : X \rightrightarrows Y$ *удовлетворяват предположенията* (П1)-(П4), *то:*

- *ако* $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ *са произволни, лесно се вижда, че точките* x_0 *и* y_0 *от формулировката на Теорема 12 винаги съществуват и*

- *ако* g *е непрекъсната и ограничена функция в* $X \times Y$, *тогава функцията* $f + g$ *и изображението* K *удовлетворяват предположенията* (П1)-(П4).

Да означим като $C(X) \times C(Y)$ декартовото произведение на нормираните със съответните sup-норми пространства $C(X)$ и $C(Y)$. Следващият резултат е следствие от Теорема 12 и Забележка 13.

Теорема 14 *Нека* $f : X \times Y \to [-\infty, +\infty]$ *е реална функция, която заедно с многозначното изображение* $K : X \rightrightarrows Y$, *удовлетворява предположенията от* (П1) *до* (П4). *Тогава*

а) *Множеството* $\{(q,p) \in C(X) \times C(Y)$: *supinf задачата има решение за функцията* $f(x,y) + q(x) + p(y), (x,y) \in X \times Y\}$*е гъсто подмножество на* $C(X) \times C(Y)$;

б) *Множеството* $\{u \in C(X \times Y)$: *supinf задачата има решение за функцията* $f(x,y) + u(x,y), (x,y) \in X \times Y\}$ *е гъсто подмножество на* $(C(X \times Y), || \cdot ||_{X \times Y, \infty})$.

Твърденията а) и б) на Теорема 14 представляват "гъсти" вариационни принципи за supinf задачи с ограничения.

В Параграф 2.4 на Глава 2 е изследван въпросът за коректност и sup-коректност на supinf задачите. За дадена целева функция $f : X\times Y \to [-\infty, +\infty]$ и изображение $K : X \rightrightarrows Y$ sup-коректността на съответната supinf задача (P) е коректността на максимизационната задача за функцията $v(x) = \inf_{y\in K(x)} f(x, y)$, $x \in X$. Първият резултат е свързан със sup-коректност. Той показва, че в някои случаи (например, в метрични пространства) можем да намерим такива смущения, че съответната смутена задача да има решение и да бъде sup-коректно поставена. Доказателството му следва това на Твърдение 2.10 от [20].

Теорема 15 *Нека за $f : X \times Y \to [-\infty, +\infty]$, $K : X \rightrightarrows Y$, x_0 и y_0 са изпълнени предположенията от Теорема 12 и нека x_0 има изброима локална база в X. Тогава съществуват $q : X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ и $p : Y \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, такива, че*

$$q(x_0) = p(y_0) = 0,\ ||q||_{X,\infty} \leq \varepsilon,\ ||p||_{Y,\infty} \leq \delta$$

и supinf задачата

$$\sup_{x\in X} \inf_{y\in K(x)} \{f(x, y) - q(x) + p(y)\}$$

има решение в (x_0, y_0). Смутената задача е sup-коректно поставена с единствено sup-решение x_0.

Като аналог на минимизираща редица се въвежда понятието оптимизираща редица за задачата (P):

Дефиниция 16 *(Kenderov и Lucchetti (1996) [18]) Редицата $(x_n, y_n) \in X \times Y$ се нарича оптимизираща за (P), ако*

1. *$y_n \in (Kx_n)$ за всяко n;*
2. *$v(x_n) \to v_f := \sup_{x\in X} \inf_{y\in K(x)} f(x, y)$;*

3. $f(x_n, y_n) \to v_f$.

Дефиниция 17 *(Kenderov и Lucchetti (1996) [18]) Задачата* (P) *се нарича коректно поставена, ако* (P) *има единствено решение* (x_0, y_0) *и всяка оптимизираща за* (P) *редица клони към него.*

Нека $S_f : C(X) \times C(Y) \rightrightarrows X \times Y$ е многозначното изображение, което на всяка двойка функции $(q, p) \in C(X) \times C(Y)$ съпоставя (възможно празното) множество от решения на задачата $\sup_{x \in X} \inf_{y \in K(x)} \{f(x, y) + q(x) + p(y)\}$. Доказана е характеризация на коректно поставените supinf задачи с ограничения.

Теорема 18 *Нека за* $f : X \times Y \to [-\infty, +\infty]$ *и* $K : X \rightrightarrows Y$ *са изпълнени предположенията от* (П1) *до* (П4)*. Тогава, изображението* S_f *е еднозначно и полунепрекъснато отгоре в* $(q, p) \in C(X) \times C(Y)$*, тогава и само тогава, когато supinf задачата* $\sup_{x \in X} \inf_{y \in K(x)} \{f(x, y) + q(x) + p(y)\}$ *е коректно поставена.*

Теорема 19 *Нека за* $f : X \times Y \to [-\infty, +\infty]$ *и* $K : X \rightrightarrows Y$ *са изпълнени предположенията от Теорема 12. Тогава, изображението* $\tilde{S}_f : (C(X \times Y), || \cdot ||_\infty) :\rightrightarrows X \times Y$ *съпоставящо на всяко* $u \in C(X \times Y)$ *(възможно празното) множество от решенията на задачата* $\sup_{x \in X} \inf_{y \in K(x)} \{f(x, y) + u(x, y)\}$ *е еднозначно и полунепрекъснато отгоре в* $u \in C(X \times Y)$*, тогава и само тогава, когато supinf задачата* $\sup_{x \in X} \inf_{y \in K(x)} \{f(x, y) + u(x, y)\}$ *е поставена коректно.*

Глава 3 е посветена на произволни игри в смесени стратегии с функции на печалба, на които не е наложено условие за непрекъснатост. Нуждата от разглеждане на такъв тип игри е продиктувана от задачи за съществуване на равновесие в стандартни икономически игри. Липсата на равновесие в прости икономически ситуации е забелязана още от Edgewoth (1925) [8] в неговата критика на модела на Bertand за дуопол. Оттук следва, че едно или повече от условията в класическите теореми за съществуване е нарушено. Условията включват непрекъснатост, квазивдлъбнатост и компактност.

Започват да се разглеждат игри с по-слабо условие за непрекъснатост и заедно с квазивдлъбнатостта се установява съществуване на равновесие. Dasgupta и Maskin (1986) [6], дават две условия, които осигуряват съществуването на равновесие в чисти стратегии за компактна и квазивдлъбната игра - игра със слабо осигурена печалба и полунепрекъснатост отгоре на функцията на печалбата. Carmona (2008) [4] подобрява техния резултат, като въвежда понятието слаба полунепрекъснатост отгоре и доказва съществуване на равновесие в чисти стратегии, ако играта е квазивдлъбната, компактна, със слабо осигурена печалба и слабо полунепрекъсната отгоре. Reny (1999) [24] доказва съществуване на равновесие по Nash в чисти стратегии ако играта е компактна, квазивдлъбната, с осигурена печалба и реципрочно полунепрекъсната отгоре[1].

Allison и Lepore (2014) [1] въвеждат понятието за игра със съответствия във функцията на печалбата с ограничено множество от общи точки на прекъсване (disjoint payoff matching (DPM), Дефиниция 21). Те показват, че такава игра в смесени стратегии е с осигурена печалба. DPM свойството се доказва, като се разглеждат характеристиките на играта в чисти стратегии и не се работи с вероятностни мерки. В дисертацията е въведена дефиниция за игра със слаби съответствия във функцията на печалбата с ограничено множество от общи точки на прекъсване (weak disjoint payoff matching (WDPM), Дефиниция 25). Тя е по-обща от дефиницията за DPM дадена в [1]. Наистина, всяка игра, която удовлетворява условието за DPM, удовлетворява и условието за WDPM. Доказано е, че WDPM може да замести условието за слаба осигуреност на печалбата при игра в смесени стратегии в резултатите за съществуване на равновесие на Carmona [4] и Dasgupta и Maskin [6]. Даден е и пример, в който се използва полученият резултат за доказване на съществуване на равновесие.

[1]Една игра е с осигурена печалба, ако при дадена обща стратегия x, всеки играч може да намери стартегия $\hat{x_i}$, при която печалбата му е близо до тази в x дори другите играчи да се отклонят малко от x. Дадена игра е реципрочно полунепрекъсната отгоре, ако при спадане на печалбата на един от играчите, печалбата на друг се увеличава.

Разгледана е игра G означена с $(X_i, u_i)_{i=1}^n$, $i = 1, ..., n$. Играта се състои от n играчи, с множество от стратегии X_i, което е компактно хаусдорфово пространство. Функцията на печалбата на всеки играч i е борелева и ограничена функция $u_i : X \to \mathbf{R}$, където $X = \prod_{i \in n} X_i$. Елемент от множеството $X_{-i} = \prod_{k \in n, k \neq i} X_k$ е означен с x_{-i}. Играта в смесени стратегии е означена с $\bar{G} = (M_i, U_i)_{i=1}^n$, като пространството от стратегии на всеки играч i е M_i – множеството от регулярни вероятностни мерки върху борелевите подмножества на X_i. Множеството M_i е компактно в слабата* топология и е изпъкнало. Функцията на печалбата е $U_i(\mu) := \int_X u_i(x) d\mu$, $\mu \in M = \prod_{i \in n} M_i$. Играта в смесени стратегии е квазивдлъбната.

Дефинираме изображението на прекъснатост така, както е направено в [1]:

$$d_i(x_i) := \{x_{-i} \in X_{-i} : u_i \text{ е прекъсната по } x_{-i} \text{ в } x = (x_i, x_{-i})\}.$$

Дефиниция 20 *(Reny (1999) [24]) Игра G се нарича игра с осигурена печалба, ако за всяко $\varepsilon > 0$, $x \in X$ и $i \in \{1, ..., n\}$, съществуват $\hat{x}_i \in X_i$ и околност $N(x_{-i})$ на x_{-i} такива, че $u_i(\hat{x}_i, x'_{-i}) \geq u_i(x) - \varepsilon$ за всяко $x'_{-i} \in N(x_{-i})$.*

Дефиницията дадена по-долу е за игра със съответствия във функцията на печалбата с ограничено множество от общи точки на прекъсване (disjoint payoff matching (DPM)). Дефиницията за DPM има две части. Първо, всеки играч може да намери отклонение от всяка своя стратегия x_i, което му носи поне същата печалба, както в x_i. Второ, общите точки на прекъсване на отклоненията са ограничени.

Дефиниция 21 *(Allison и Lepore (2014) [1]) Игра G удовлетворява DPM, ако за всяко $x_i \in X_i$, $i \in \{1, ..., n\}$, съществува редица от отклонения $(x_i^k)_k \in X_i$ такава, че*
(i) $\liminf\limits_k \; u_i(x_i^k, x_{-i}) \geq u_i(x_i, x_{-i})$ *за всяко* $x_{-i} \in X_{-i}$,
(ii) $\operatorname*{Lim\,sup}\limits_k \; d_i(x_i^k) = \emptyset$.

Теорема 22 *(Allison и Lepore (2014) [1]) Ако G е компактна игра и удовлетворява DPM, тогава $\bar{G}$ е игра с осигурена печалба.*

Дефиниция 23 *Игра G се нарича игра със слабо осигурена печалба, ако за всяко $\varepsilon > 0$, $x \in X$ и $i \in \{1, ..., n\}$, съществува околност $N(x_{-i})$ на x_{-i} със следното свойство: за всяко $x'_{-i} \in N(x_{-i})$ съществува $\hat{x}_i \in X_i$ такова, че $u_i(\hat{x}_i, x'_{-i}) \geq u_i(x) - \varepsilon$.*

Ако $\hat{x}_i$ е едно и също за всяко x'_{-i}, тогава свойството слабо осигурена печалба е еквивалентно на свойството осигурена печалба. Свойството слабо осигурена печалба е едно от условията, които осигуряват съществуване на равновесие в резултата на Dasgupta и Maskin [6].

Теорема 24 *(Dasgupta и Maskin (1986) [6]) Ако игра G е компактна, квазивдлъбната, полунепрекъсната отгоре и със слабо осигурена печалба, тогава съществува равновесие по Nash в чисти стратегии.*

За дадена функция $f : X_{-i} \to X_i$ дефинираме

$$D_i(f) := \{z | \ u_i(f(z), z) \ \text{ е прекъсната в } \ z\}.$$

Дефиницията за игри със слаби съответствия във функцията на печалбата с ограничено множество от общи точки на прекъсване (weak disjoint payoff matching (WDPM)), която е предложена в дисертацията, може да се използва за доказването на свойството слаба осигуреност на печалбата за игрите в смесени стратегии.

Дефиниция 25 *Игра G удовлетворява WDPM ако за всяко $x_i \in X_i$, $i \in \{1, ..., n\}$, съществува редица от борелеви функции $(T^k_{x_i})_k : X_{-i} \to X_i$ такава, че*
(i) $\liminf_k \ u_i(T^k_{x_i}(x_{-i}), x_{-i}) \geq u_i(x_i, x_{-i})$ *за всяко* $x_{-i} \in X_{-i}$,
(ii) $\operatorname{Lim\,sup}_k \ D_i(T^k_{x_i}) = \emptyset$.

Това условие се проверява лесно и няма нужда да се работи с произволни вероятностни мерки, за да се докаже валидността му. В частност, ако $T^k_{x_i}(x_{-i}) = x^k_i$ ($x^k_i \in X_i$) за всяко x_{-i}, то свойството WDPM е еквивалентно на свойството DPM. В случай, че $u_i(x_i, x_{-i})$ е непрекъсната като функция на x_{-i} в x_i, WDPM е изпълнено тривиално, като $T^k_{x_i} = x_i$ за всяко x_{-i}. Допълнително, ако $D_i(T^k_{x_i}) \cap D_i(T^l_{x_i}) = \emptyset$, за $k \neq l$, то $\operatorname{Lim\,sup}_k \ D_i(T^k_{x_i}) = \emptyset$.

Теорема 26 *Ако G е компактна игра, която удовлетворява WDPM, тогава $\bar{G}$ е игра със слабо осигурена печалба.*

За доказателството е използван подходът разработен от Allison и Lepore в [1].

Заключение (Авторска справка)

Приносите в настоящата дисертация са изложени изчерпателно в първа, втора и трета глава и са публикувани в статиите [16], [12], [17], [15].

В Глава 1 е разгледан модел на Cournot и са изведени някои свойства на функцията на печалбата в случай на (-1)-вдлъбната ценова функция. С помощта на тези свойства е доказано съществуване на равновесие в случай на (-1)-вдлъбната и непрекъсната ценова функция. Ако N е броят на фирмите на пазара и функцията на цената е $(-1/N)$-вдлъбната и непрекъсната, е доказано, че сумите на Nash са константни. Ако предположенията до тук са изпълнени и освен това функцията на цената е диференцируема, точката на равновесие е единствена. Съществуване и единственост на равновесието при логаритмично вдлъбната (0-вдлъбната) ценова функция е следствие на представения тук резултат. При доказателството за единственост на равновесие е използвана техниката, разработена от von Mouche и Quartieri в [26], но резултатът представен в настоящата дисертация не е еквивалентен на техния резултат. Дадени са примери, които показват, че свойството изпъкнала интегрирана ценова гъвкавост, дефинирано в [26] не е следствие, нито обобщение на (-1)-вдлъбнатост. В теоремата за съществуване на равновесие в [10] Ewerhart предполага, че функциите на приходи и разходи са два пъти диференцируеми, а представената Теорема 8 за съществуване е за негладки в общия случай функции. Резултатите от Глава 1 са публикувани в [16].

В Глава 2 са разгледани вариационни принципи за inf и за supinf задачи с ограничения в напълно регулярни топологични пространства. Резултатите в тази глава се основават на вариационните принципи за inf и supinf задачи без ограничения, разгледани от Kenderov и Revalski в [19] и [20]. Изведени са условия, които позволяват пертурбации на дадена функция с подходящи непрекъснати функции по такъв начин, че оптимизационната задача с ограничения за смутената функция да има решение. С помощта на вариационния принцип за inf задачи с ограничения е доказан вариационният принцип на Ekeland и теоремата за неподвижна точка на Caristi в метрични пространства. Даден е пример, който илюстрира вариационния принцип за supinf задачи. Изведен е резултат за sup-коректност, като се използва понятието за изброима локална база в дадена точка. Направена е характеризация на коректно поставените supinf задачи. Резултатите от Глава 2 са публикувани в [12] и [17].

В Глава 3 се разглеждат некооперативни игри в общ вид без условие за непрекъснатост на функцията на печалбата. Въведена е дефиниция за игра със слаби съответствия във функцията на печалбата с ограничено множество от общи точки на прекъсване (weak disjoint payoff matching (WDPM)). Показано е, че въведеното от Allison и Lepore в [1] условие за игра DPM, е частен случай на WDPM. Доказано е, че ако една игра удовлетворява условието WDPM, тя е със слабо осигурена печалба в смесени стратегии. Слаба осигуреност на печалбата е условие за съществуване на равновесие в резултатите на Carmona [4] и Dasgupta и Maskin [6]. Предимството на условието WDPM е, че няма нужда да се работи с вероятностни мерки, за да се докаже валидността му. Даден е пример на игра, която удовлетворява WDPM. Резултатите от Глава 3 са публикувани в [15].

Апробация на резултатите

Резултатите от дисертацията са публикувани в следните статии, включени в библиографията със съответните номера:

[12] Gaumont D., **Kamburova D.**, Revalski J.P., *Perturbations of supinf problems with constraints*, Vietnam Journal of Mathematics, (2019), **47(3)**, 659–667 ISSN: 2305-221X (Print) 2305-2228 (Online), SJR 0.375

[16] Kamburova D., Marinov R., *Cournot equilibrium in case of (-1)-concave price function*, Mathematica, (2019), **61(2)**, 138–145, ISSN (print) : 1222-9016, ISSN (online): 2601-744X, SJR 0.223,

[17] Kamburova D., Marinov R., *A Note on Ekeland's Variational Principle and Caristi's Fixed Point Theorem*, приета за публикуване в Geometry, Integrability and Quantization, (2022), SJR 0,22 (2021)

[15] Kamburova D., *Weak payoff security in mixed strategies*, Comptes rendus de l'Academie bulgare des Sciences, (2020), **73(4)**, 467–474, ISSN (print): 1310-1331, ISSN (online): 2367-5535, IF 0.378, SJR 0.244

Получените резултати са представени в следните изнесени лично доклади:

[1] Детелина Камбурова, "Perturbations of supinf problems with constraints", доклад пред семинара по Изследване на операциите, ИМИ - БАН, 26.03.2019;

[2] Детелина Камбурова, "Weakly payoff secure games in mixed strategies", доклад пред семинара по Оптимизация, Софийски университет „Св. Климент Охридски“ – Факултет по Математика и Информатика, 07.06.2019;

[3] Детелина Камбурова, "Вариационни принципи за Supinf задачи с ограничения", доклад на II Интердисциплинарен докторантски форум, хотел „Самоков”, Боровец, 29-31 август 2019;

[4] Detelina Kamburova, "Variational Principles for Supinf Problems with Constraints", XXI International Conference Geometry, Integrability and Qunatization, Varna, Bulgaria 3-8 June 2019;

Благодарности

Бих искала да изразя дълбоката си признателност към моя научен ръководител акад. Юлиан Ревалски, без когото тази работа не би била възможна, за отделеното време и за подкрепата, която ми оказа.

Считам за приятен свой дълг да благодаря на колегите от секция ИОВС на ИМИ при БАН, катедра ВОИС на ФМИ на СУ "Св. Климент Охридски както и на колегите от катедра Математика и Физика на ТУ–Варна за отзивчивостта им и интереса им към моята работа.

Библиография

[1] Allison B. A., Lepore J. J., *Verifying payoff security in the mixed extension of discontinuous games*, Journal of Economic Theory, (2014), **152**, 291–303.

[2] Amir R., *Cournot oligopoly and the theory of supermodular games*, Games and Economic Behavior, (1996), **15(2)**, 132-148.

[3] Bertrand J., *Book review of theorie mathematique de la richesse sociale and of recherches sur les principles mathematiques de la theorie des richesses Journal de Savants*, (1883), **67**, 499–508.

[4] Carmona G., *An existence result for discontinuous games*, Journal of Economic Theory, (2009), **144(3)**, 1333–1340.

[5] Cournot, A. *Recherches sur les Principes Mathematiques de la Theorie des Richesses*, (1838), Paris, Hachette.

[6] Dasgupta P., Maskin E., *The Existence of Equilibrium of Discontinuous Economic Games*, I: Theory, Review of Economics Studies, (1986), **53(1)**, 1–26.

[7] Debreu H., *A Social Equilibrium Existence Theorem*, Proceedings of the National Academy of Sciences of USA, (1952), **38(10)**, 886-893.

[8] Edgeworth F. Y., *Papers relating to political economy*, (1925), Royal economic society by Macmillan and Company, limited.

[9] Ekeland I., *On the variational principle*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, (1974), **47(2)**, 324-53.

[10] Ewerhart C., *Cournot games with biconcave demand*, Games and Economic Behavior, (2014), **85**, 37-47.

[11] Fan K., *Fixed Point and Minimax Theorems in Locally Convex Topological Linear Spaces*, Proceedings of the National Academy of Sciences of USA, (1952), **38(2)**, 121-126.

[12] Gaumont D., Kamburova D., Revalski J.P., *Perturbations of supinf problems with constraints*, Vietnam Journal of Mathematics, (2019), **47(3)**, 659–667.

[13] Glicksberg I. L., *A further generalization of the Kakutani fixed point theorem, with application to Nash equilibrium points*, Proceedings of the American Mathematical Society, (1952), **3(1)**, 170-174.

[14] Ioffe A. D., Lucchetti R. E., Revalski J. P., *A variational principle for problems with functional constraints*, SIAM Journal on Optimization, (2002), **12(2)**, 461-478.

[15] Kamburova D., *Weak payoff security in mixed strategies*, Comptes rendus de l'Academie bulgare des Sciences, (2020), **73(4)**, 467–474.

[16] Kamburova D., Marinov R., *Cournot equilibrium in case of (-1)-concave price function*, Mathematica, (2019), **61(2)**, 138–145.

[17] Kamburova D., Marinov R., *A Note on Ekeland's Variational Principle and Caristi's Fixed Point Theorem*, приета за публикуване в Geometry, Integrability and Quantization, (2022)

[18] Kenderov P., Lucchetti R., *Generic well-posedness of supinf problems*, (1996), Bulletin of Australian Mathematical Society, **54**, 5–25.

[19] Kenderov P., Revalski J. P., *Dense existence of solutions of perturbed optimization problems and topological games*, (2010),

Comptes rendus de l'Academie bulgare des Sciences, **63(7)**, 937–942.

[20] Kenderov P., Revalski J. P., *Variational principles for supinf problems*, Comptes rendus de l'Academie bulgare des Sciences, (2017), **70(12)**, 1635-1642.

[21] McLinden L., *An application of Ekeland's theorem to minimax problems*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, (1982), **6(2)**, 189-196.

[22] Murphy F. H., Sherali H. D., Soyster A. L., *A mathematical programming approach for determining oligopolistic market equilibrium*, Mathematical Programming, (1982), **24(1)**, 92-106.

[23] Nash J, *Non-cooperative games*, Annals of mathematics, (1951), 286-295.

[24] Reny P. J., *On the existence of pure and mixed strategy Nash equilibria in discontinuous games*, Econometrica, (1999), **67(5)**, 1029–1056.

[25] Shapiro A., Dentcheva D., Ruszczynski A., *Lectures on stochastic programming: modeling and theory*, (2021), Society for Industrial and Applied Mathematics.

[26] von Mouche P., Quartieri F., *On the Uniqueness of Cournot Equilibrium in Case of Concave Itegrated Price Flexibility*, Journal of Global Optimization, (2013), **57**, 707-718.

[27] von Mouche P., Quartieri F., *Cournot Equilibrium Uniqueness in Case of Concave Industry Revenue: A Simple Proof*, Economics Bulletin, (2015), **35(2)**, 1299-1305.

[28] von Stackelberg H., *Market Structure and Equilibrium*, (2011), Springer.