Р Е Ц Е Н З И Я

върху дисертационен труд за получаване на образователната и научна степен „Доктор" в област на висшето образование 4. Природни науки, математика и информатика, професионално направление 4.5 Математика, по научна специалност 01.01.11 „Изследване на операциите"

Автор на дисертацията: Диана Кирилова Неделчева

Тема на дисертацията: „Теореми за неявната функция за обобщени уравнения"

Рецензент: проф. дмн Михаил Иванов Кръстанов, ИМИ-БАН

1. Общо описание на дисертацията

Представеният дисертационен труд на тема: „Теореми за неявната функция за обобщени уравнения" е представен на 106 стандартни страници. Библиографската справка показва, че са използвани 27 литературни източници, като 26 са на английски език, а 1 – на руски език. Материалът е структуриран в увод, две глави, анекс и заключение, в което се резюмират приносите на дисертацията.

2. Актуалност на разработвания проблем

Дисертацията е посветена на едно ново и перспективно направление във вариационния анализ, което се развива бързо, особено в последните години. Основната цел е да се използват идеи и резултати от теорията на многозначните изображения (свързани с "графична локализация", "метрична регулярност", "Обен непрекъснатост", липшицовост и др.), за да се изучава множеството от решения на така наречените "обобщени уравнения". Обобщените уравнения са въведени от R. S. Robinson през 70-те години на миналия век като абстрактен модел на редица вариационни задачи. Типичен пример за обобщено уравнение е следният: Търсим елемент x от банаховото пространство X, така, че

$$0 \in f(p, x) + F(x),$$

където $f : P \times X \to Y$ е функция, а $F : X \Rightarrow Y$ – многозначно изображение.

Такива уравнения възникват по естествен начин при решаване на различни оптимизационни задачи и могат да включват различни вариационни неравенства, както и ограничения, зависещи от параметри. Убедителна мотивация за изучаване на такива задачи може да се намери в монографията на Асен Л. Дончев и R. Tyrrell Rockafellar "Implicit Functions and Solution Mappings", издадена от Springer през 2008 г. А за актуалността на тази тематика може да

се съди и по факта, че тази същата монография претърпя две издания само в разстояние на пет години.

3. Познаване на състоянието на проблема и характеристика на избраната методика на изследване

Създаването на итеративни методи за решаване на обобщени уравнения, които зависят от параметри, изисква задълбочени познания за свойствата на многозначни изображения. В дисертационния труд са разширени някои класически резултати за сходимост на итеративни методи. За тази цел са използвани подходящи понятия и твърдения от анализа на многозначни изображения (например, теорема за обратната функция за силно метрично регулярно изображение, теорема за неявното изображение с метрична регулярност в пълни метрични пространства, принципът на свиващото изображение и др.). От изложението и цитираните източници става ясно, че докторантката е добре запозната със съвременното състояние на разглежданите проблеми, както и с постиженията на други автори, работещи в същата област.

3. Характеристика на резултатите

В Глава 1 са въведени някои термини, означения и предварителни резултати, които се използват в по-нататъшното изложение на дисертацията. Въведено е понятието многозначно изображение, както и понятията метрична регулярност, псевдо-липшицовост, силна метрична регулярност с модул функция, Обен непрекъснатост с модул функция, поточкова апроксимация, Бианчини-Грандолфи калибровъчна функция, разделени разлики от първи и втори ред и др.

В глава 2 са разгледани следните методи за решаване на обобщени уравнения с параметри: метод от Нютонов тип, включващ поточкова апроксимация; метод на хордите и метод на секущите. И при трите метода се дефинира изображение Ξ, което на начална точка и стойност на параметъра съпоставя всички апроксимиращи редици, получени при последователно прилагане на съответния метод. За така дефинираното изображение Ξ се доказва, че притежава еднозначна липшицова локализация.

Сходимостта на метода от Нютонов тип за решаване на обобщени уравнения без параметър е доказана от Асен Дончев в [5], а в случая на обобщени уравнения с параметър – от Асен Дончев и R.T. Rockafelar в [6] и [11]. Доказателствата в последната статия статията се базират на апроксимация на еднозначната функция с помощта на формулата на Тейлър. За разлика от тези статии, в дисертацията за метода от Нютонов тип не се предполага диференцируемост на f спрямо x, а наличие на поточкова апроксимация на f спрямо x, която е равномерна по параметъра. Доказана е квадратична сходимост. За изображението Ξ са направени оценки на липшицовата константа на неговата еднозначна локализация, както спрямо началната точка, така и по параметъра.

Сходимостта на метода на хордите за решаване на обобщени уравнения

без параметър е изследвана от Р. Маринов в [21], докато в дисертацията този метод е изучен при наличие на параметри. Доказано е съществуване на околности на началната точка и на параметъра, така, че при всеки избор на точка и стойност на параметъра от тези околности съществува точно една редица, клоняща линейно към съответното решение. За изображението Ξ са направени оценки на липшицовата константа на неговата еднозначна локализация, както спрямо началната точка, така и по параметъра.

Сходимостта на метода на секущите за решаване на обобщени уравнения без параметър е изследвана от M. H. Geoffroy и A. Piétrus в [18]. В този метод участват две еднозначни функции и едно многозначно изображение. Първата от функциите е диференцируема по Фреше спрямо променливата x в околност на решението и участва в метода с нейната Тейлърова апроксимация от първи ред, а втората – със своята разделена разлика от първи ред. В дисертацията се изучава случая, когато и двете функции зависят от параметър. За съответното изображение Ξ са направени оценки на липшицовата константа на неговата еднозначна локализация, както спрямо началната точка, така и по параметъра.

В първия параграф на трета глава е доказано обобщение на принципа за свиващото изображение, разгледан в монографията на A. L. Dontchev and R.T. Rockafelar, за случая на многозначни изображения. В дисертацията са използвано по-слаби предположения, основани на използване на Бианчини-Грандолфи калибровъчни функции вместо псевдо-свиващи многозначни изображения. Използвайки обобщението на принципа за свиващото изображение е доказана теорема за обратното изображение и теорема за неявното изображение за Обен непрекъснати изображения с модул функции.

Във втория параграф на трета глава е направено обобщение на принципа за свиващото изображение за еднозначни изображения, като отново са използвани Бианчини-Грандолфи калибровъчни функции. Доказани са обобщения на теоремата за обратната функция и теоремата за неявната функция за силно метрично регулярни функции, доказани от A. L. Dontchev и R.T. Rockafellar в [11].

За улеснение на читателя, пълните доказателства на Теорема 2.1.3. и Теорема 2.1.2. са представени в Анекс в края на дисертацията.

6. Оценка на приносите

Моето мнение е, че формулираните от дисертанта приноси правилно отразяват постигнатите резултати.

7. Преценка на публикациите Диана Неделчева е представила четири публикации по дисертационния труд, две от които са самостоятелни, а другите две – в съавторство с д-р Румен Маринов. По-конкретно, първата самостоятелна публикация е в Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo през 2012 г. Това списание се издава от Springer и се реферира от SCOPUS. Втората самостоятелна публикация е в Mathematica Slovaca през 2013 г. Това списание се

издава от Springer и има импакт фактор 0.451 за 2013 г. Третата публикация е в Advancements and Developments in Applied Mathematics през 2012 г. Това е ново списание, което се издава от 2012 г. и се реферира от Zentralblatt fuer Mathematik. Четвъртата публикация е в Ricerche di Matematica, което също се издава от Springer.

Резултати на докторантката са докладвани на Третия международен научен конгрес, проведен във Варна от 4 до 6 октомври 2012 г., а така също и на семинара с представителите на целеви групи и експерти по проекта "Развитие потенциала на докторанти, постдокторанти, млади учени и специализанти в ТУ Варна и техния принос за развитие на икономика, базирана на знанието", проведен на 19 юни 2013 г. в Златни пясъци.

Смятам, че резултатите получени от докторантката са оригинални. Считам за равностойно участието на докторантката в съвместните й статии. Не са ми известни техни цитирания засега.

8. Оценка на автореферата

Авторефератът правилно отразява основните резултати и описва научните приноси на дисертационния труд. В авторската справка правилно са изброени приносите на докторанта.

9. Критични бележки

Според мен, материалът в първа глава би могъл да се разшири с подходящи примери, които да дават представа за многото нови понятия и твърдения, които се въвеждат там. Това би било много полезно и би подготвило читателя за основния материал, представен във втора глава. Например, понятието Бианчини-Грандолфи калибровъчна функция е само бегло скицирано и от Определение 1.3.6 изобщо не става ясно какви са неговите свойства.

Втора глава е най-голяма по обем и съдържа повечето от получените резултати. За съжаление, докторантката Диана Неделчева не е положила достатъчно усилия да обясни на читателя идеите, стоящи в основата на представените твърдения и техните доказателства. Ето защо проследяването на формалните пресмятания се оказва трудна задача. Всъщност схемата на доказателство и при трите метода се свежда до прилагане на принципа на свиващото изображение към подходящо дефинирани липшицови изображения и това би трябвало да бъде изяснено в предварителните бележки към тази глава. Разумно е и да се представят подходящи примери, илюстриращи приложението на предложените методи.

Повече внимание е трябвало да се отдели и на предположенията, при които са доказани твърденията в дисертацията, да се дискутира доколко те са необходими по същество или са свързани с метода на доказателство. Това е много важно за да могат да се открият научните приноси. Ще дам следния пример в тази връзка: Да разгледаме Теорема 2.1.2 от дисертацията, където се използва поточкова апроксимация за f по x, равномерно по параметъра. Подобно твърдение е доказано от Асен Дончев и R.T. Rockafelar, където функцията

f се апроксимира по x, равномерно по параметъра, с помощта на формулата на Тейлър. За да ни убеди във важността на Теорема 2.1.2, докторантката е трябвало да приведе пример на негладка функция, притежаваща поточкова апроксимация. Друг пример са Теорема 3.1.1 и Теорема 3.2.1. Струва ми се, че тези твърдения са тясно свързани както по техните формулировки, така и по схемата на техните доказателства. Естествено е връзката между тези две твърдения да бъде коментирана в дисертацията.

Горепосочените слабости затрудняват четенето на дисертацията, особено ако читателят вижда такива резултати за първи път. Разбира се, всички тези недостатъци са разбираеми и могат да се обяснят с младостта и неопитността на докторантката.

10. Заключение

Представеният дисертационен труд отговаря на изискванията на закона за развитие на академичния състав в Република България (ЗРАСРБ) и правилника за неговото прилагане. Представените към дисертацията трудове са достатъчни по качество и количество.

Това ми дава основание да препоръчам на научното жури да гласува положително за присъждане на Диана Кирилова Неделчева образователната и научна степен "Доктор" в област на висшето образование 4. Природни науки, математика и информатика, професионално направление 4.5 Математика, по научна специалност „Изследване на операциите".

Рецензент:

28.04.2015 г.
София

/про