

РЕЦЕНЗИЯ

на дисертационен труд за получаване на ОНС "доктор"

област на висше образование: 4. Природни науки, математика и информатика

професионално направление: 4.5. Математика

докторска програма: Изследване на операциите на ИМИ-БАН

автор на дисертацията: Диана Кирилова Неделчева

тема на дисертацията: "Теорема за неявната функция за обобщени уравнения"

рецензент: доц. д-р Надя Пейчева Златева, ФМИ на СУ

Диана Кирилова Неделчева е завършила докторантурата си в докторска програма "Изследване на операциите" на ИМИ БАН с научен ръководител чл. кор. проф. д-м Юлиан Ревалски.

1. Анализ на постиженията в дисертационния труд.

Представеният дисертационен труд на тема "Теорема за неявната функция за обобщени уравнения" е с обем от 106 страници. Според библиографската справка са използвани 27 литературни източници (като посочените под [8] и [11] съвпадат). Извън тях, на стр. 101 са посочени 4 авторски публикации по дисертацията. Трудът е структуриран в увод, четири глави, последната от които е оформена като анекс и заключение, в което са резюмирани приносите на автора.

В увода, след кратки исторически бележки, е посочена целта на разглежданата – решаване на т.нар. обобщено уравнение

$$\text{да се намери } x \in X \text{ такова че } 0 \in f(p, x) + F(x),$$

където X, Y, P са банахови пространства, $f : P \times X \rightarrow Y$ е непрекъсната функция, а $F : X \rightrightarrows Y$ е многозначно изображение.

В дисертацията се разглеждат различни итерационни методи за решаване на това обобщено уравнение, чието изображение на решението е

$$S : p \rightarrow \{x \mid 0 \in f(p, x) + F(x)\} \text{ за } p \in P.$$

В глава 1 се въвеждат термини и означения и се цитират някои използвани резултати.

В глава 2 се разглеждат следните итерационни методи за решаване на обобщено уравнение с параметър – метод от пълнов тип с поточкова апроксимация на функцията, метод на хордите и метод на секущите. За всеки от тях е доказана теорема за сходимост и теорема за неявната функция.

В глава 3 се прави обобщение на теорема за неподвижната точка на многозначно изображение, на теорема за обратното изображение и на теорема за неявното изображение като вместо липшицовост се предполага непрекъснатост с модул функция и калибровъчна функция вместо свиващо изображение.

Глава 1. В дефинициите и теоремите, посочени в тази глава не винаги се посочват предположенията за пространствата X, Y, P – напр. в Теорема 1.2.1, Следствие 1.2.2, Теорема 1.2.3 и т.п.

Ресферсията Ioffe-Tikhomirov [16] на стр. 19 е спорна, т.к. в библиографията под [16] е работа на Ferris-Pang.

В Определение 1.3.6 предположението φ да е непрекъсната в нулата е излишно поради $0 \leq \varphi(t) < t$.

Глава 2. Работи се с параметризирано обобщено уравнение в банахови пространства.

В § 2.1 се разглежда метод от пълнов тип с поточкова апроксимация на функцията. За него се доказва равномерна сходимост (Теорема 2.1.2) и теорема за неявната функция (Теорема 2.1.3) като се модифицират доказателствата в книгата A. L. Dontchev, R. T. Rockafellar, "Implicit functions and solution mappings Springer, 2009. Доказателствата са приведени в апекса на дисертацията. Според мен е пропуснато във формулировките на теоремите условието $0 \in G(\bar{x})$. Резултатите от тази глава са публикувани в Nedelcheva, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 2012, но там и формулировките и доказателствата се различават от тези в дисертацията.

В § 2.2 се разглежда метод на хордите. За него се доказва равномерна сходимост (Теорема 2.2.1) и теорема за неявната функция (Теорема 2.2.2) като отново се следват доказателствата в книгата на A. L. Dontchev, R. T. Rockafellar. Още в началото на доказателството на Теорема 2.2.1 има проблем с избора на константите. Ако сме избрали γ като в (2.13), $\kappa > \text{lip}(\sigma; 0)$, $\omega > \|\nabla_x f(\bar{p}, \bar{x}) - A\|$ и $\kappa\omega < \gamma$ и след това допуснем, че можем да изберем $\varepsilon > \omega$ и такава че $\kappa\varepsilon < 1$ и $\frac{\kappa\omega}{1 - \kappa\varepsilon} < \gamma$, то тогава ще следва че $\kappa\omega < \frac{\gamma}{1 + \gamma}$. А ако са избрани $\kappa > \text{lip}(\sigma; 0)$, $\omega > \|\nabla_x f(\bar{p}, \bar{x}) - A\|$, такива че $\gamma > \kappa\omega > \frac{\gamma}{1 + \gamma}$, тогава как ще продължи доказателството? Това компрометира доказателството на теоремата. Доказателството на тази теорема в Nedelcheva, Mathematica Slovaca, 2013 е направено при друг избор на γ , при който проблем в доказателството няма. Странно какво е наложило авторът да се спре в дисертацията на друг и то неудачен избор на константата. Що се отнася до теоремата за неявната функция за този метод (Теорема 2.2.2) проблемът освен в това че работи с предположенията на предходната теорема е и в заключението. Там във второто

неравенство на (2.30) в знаменател се появява $\|\nabla_x f(p, x) - A\|$, което спокойно може да бъде нула. В предпоследния ред на доказателството може да се оцени $\frac{\kappa\nu}{1 - 2\kappa\tau} \leq 3\kappa\nu$ и това води до по-силна оценка, защото $3\kappa\nu < \frac{\nu}{\omega}$, а и в резултат се получава оценка $\widehat{\text{lip}}_p(\xi; (\bar{x}, p)) \leq 3\widehat{\text{lip}}(\sigma; 0)\widehat{\text{lip}}_p(f; (\bar{x}, p))$, която е в духа на оценката в аналогичната теорема в книгата на A. L. Dontchev, R. T. Rockafellar. Да отбележим само, че в Nedelcheva, *Mathematica Slovaca*, 2013 е изказан по-силен от резултата в Теорема 2.2.2, но пък в доказателството му грешно се твърди, че τ може да се избере произволно малко, което поради избора $\tau > \omega$ не е възможно.

В § 2.3 се разглежда метод на секущите. За него се доказва равномерна сходност (Теорема 2.3.2) и теорема за неявната функция (Теорема 2.3.3) като отново се следват доказателствата в книгата на A. L. Dontchev, R. T. Rockafellar.

Тук се използва въведеното в Определение 1.1.9 понятие за разделена разлика от първи ред. Не е изяснено при дефиницията му това, че е възможно това условие да се удовлетворява от множество оператори (вж. например S. Hilout, *J. Math. Anal. Appl.*, 339 (2008), 753-761). Навсякъде във формулировките се говори за разделената разлика, т.е. така като че ли тя е единствена. Предположенията в теоремите тук по-скоро би трябвало да са относно съществуването на разделена разлика с исканите свойства.

Във формулировката на Теорема 2.3.2 е пропуснато $0 \in G(x)$. В доказателството на теоремата на стр. 51 с буквата φ е означена както константа, така и функция. Основен проблем с доказателството тук е, че съгласно дефиницията (Определение 1.1.10) разлика на разделени разлики от първи ред се заменя с разделена разлика от втори ред, ако имаме един и същ аргумент на първо място в едната и на второ място в другата разделена разлика от първи ред, докато на стр. 55 в първата формула горе се оценява

$$\|[p, \bar{x}, v; g](v - \bar{x}) - [p, u, v; g](v - \bar{x})\| \leq \|[p, u, v, \bar{x}; g]\| \|x - u\| \|v - \bar{x}\|,$$

т.е. оценка с разделена разлика от втори ред при равни втори аргументи на разделените разлики от първи ред (като забравим за параметъра разбира се).

Що се отнася до теоремата за неявната функция за този метод (Теорема 2.3.3) същата тази оценка на разлика на разделени разлики от първи ред с разделена разлика от втори ред се прави по този некоректен начин във формули на стр. 60, стр. 62 и стр. 64. В условието на тази теорема се предполага, че $\widehat{\text{lip}}([g]; (\bar{p}, \bar{x}, \bar{x})) < \infty$. Ако смисълът на това е посоченото в (2.61) неравенство, то функцията g тогава е диференцируема в околност (Remark 2.1 в S. Hilout, *J. Math. Anal. Appl.*, 339 (2008), 753-761) и производната ѝ там е липшицова. Това обезсмисля по-слабите предположения за функцията g , декларирани в началото на параграфа.

Резултатите от този параграф са публикувани в Nedelcheva, Marinov, *Advancements and Developments in Applied Mathematics*, 2012.

Глава 3. Тук разглежданията са в метрични пространства.

В § 3.1 се обобщават резултати за многозначни непрекъснати изображения.

В Теорема 3.1.1 е доказано обобщение на теоремата за неподвижната точка за многозначно изображение (Theorem 5E2 в книгата на Dontchev, Rockafellar) като вместо това изображението да е свиващо се предполага по-общо неравенство с Bianchini-Grandolfi калибровъчна функция. Освен статията на Bianchini-Grandolfi от 1968 г. не са посочени други референции за използването на такива функции в контекста на разглежданата тема – резултати за многозначни изображения. Близък до резултата в дисертацията може да се намери например в Theorem 3.3 в J. Marin, S. Romaguera, and P. Tirado. Q-Functions on Quasimetric Spaces Fixed Points for Multivalued Maps, Fixed Point Theory and Applications, 2011, Article ID 603861.

В Теорема 3.1.2 е направено обобщение на теорема за обратното изображение (Theorem 5E1 в книгата на Dontchev, Rockafellar) като регулярностите и непрекъснатостите не са в липшицови термини, а в термините на модул функция и калибровъчна функция. Има грешка в дефиницията на $s(l)$ на последния ред на стр. 72. Трябва

$$s(l) = \sum_{n=0}^{\infty} (\varphi \circ \psi)^n(l) < \infty.$$

Във формулировката се предполага непрекъснатост на s в 0, а в доказателството съществено се използва непрекъснатост на s в точки, различни от 0. В общия случай s не е непрекъсната. За щастие тук функциите φ и ψ са непрекъснати като модул функции и от това следва, че s е непрекъсната. Това нито е изказано, нито е доказано от автора, но пак е съществено за непрекъснатостта на s , която е необходима, за да се твърди, че тя е модул функция. Това прави и предположението за непрекъснатост на s в 0 излишно.

Обобщенията продължават с Теорема 3.1.3, в която е направено обобщение на теоремата за неявното изображение (Theorem 5E3 в книгата на Dontchev, Rockafellar) като и тук регулярностите и непрекъснатостите не са в липшицови термини, а в термините на модул функция и калибровъчна функция.

И тук е в сила същата слабост на доказателството и същия коментар за функцията s , направен по-горе.

Резултатите от § 3.1 са публикувани в R. Marinov, D. Nedelcheva, *Ricerche di Matematica*, 2013.

В § 3.2 трите резултата от § 3.1 са направени при предположения за силна метрическа регулярност, която води до еднозначни непрекъснати изображения.

Теорема 3.2.1 е очевидно следствие от Теорема 3.1.1, а предположението за непрекъснатост на Φ е излишно.

Теорема 3.2.2 обобщава Theorem 5F1 от книгата на Dontchev, Rockafellar, а Теорема 3.2.3 – Theorem 5F4 от книгата на Dontchev, Rockafellar.

Темата на дисертацията е актуална и интересна. Авторът познава добре основните резултати в областта и е в състояние да прави вариации върху тях. Вникнал е в основните проблеми в тематиката и владее до някъде апарата от стандартни средства за решаването им. За съжаление, при адаптиране на развитите от Dontchev, Rockafellar техники авторът среща затруднения. Изложението е добро и

информативно. Краткият списък в библиографията показва недостатъчно добро познаване на литературата.

2. Описание на публикациите, които отразяват дисертацията. Резултатите в дисертацията са публикувани в следните 4 статии:

[1] D.K. Nedelcheva, A sequential implicit function theorem for iterative solution of generalized equation involving point-based approximation, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 2012, Volume 61, pp 65-78. Списанието се публикува от Springer, реферира се в Scopus, SJR2012=0,622.

[2] R. Marinov, D. Nedelcheva, Some iterative methods for solving generalized equations: A sequential implicit function theorem, *Advancements and Developments in Applied Mathematics*, 2012, Volume 2. Issue 1, pp 6-36.

[3] D. K. Nedelcheva, Implicit Function Theorem for Chords Iteration, *Mathematica Slovaca* 2013, Volume 63, Issue 5, pp 1085- 1100. Списанието се реферира в Web of Science и има IF2012=0.451.

[4] R. T. Marinov, D. K. Nedelcheva, Implicit mapping theorem for extended metric regularity in metric spaces, *Ricerche di Matematica*, 2013, Volume 62, Issue 1, pp 55-66. Списанието се публикува от Springer, реферира се в Scopus, SJR2013=0,491.

С това дисертантът покрива изискванията на чл. 6 ал. 3 от ПРАВИЛНИК за условията и реда за придобиване на научни степени и за заемане на академични длъжности в Института по математика и информатика на БАН за представяне на поне 3 публикации в рецензирани издания, едно от които да е списание.

3. Отражение на резултатите на дисертацията в трудовете на други автори - цитати и др. Цитирания на работите на дисертанта не са забелязани, което поради скоростния характер на публикациите е разбираемо.

4. При колективни публикации да се отрази приносът на кандидата. От представените четири публикации две са в съавторство с Р. Маринов. В приложените документи няма документ отразяващ приноса на дисертанта в тях, но мога да го приема за равносвален.

5. Критични бележки и препоръки. Критичните бележки са изложени в точка 1. Препоръчвам да се обърне внимание на коректността на доказателствата. Надявам се получените резултати да бъдат използвани в бъдещи изследвания в тази област.

6. Качества на автореферата, включително доколко правилно отразява приносите на дисертацията. Авторефератът е с обем от 27 страници и 27 заглавни цитирани литература и отразява резултатите, описани в дисертацията. В померацията на резултатите (която е различна от тази в дисертацията) липсва Теорема 5. В авторската справка са дадени накратко приносите в дисертационния труд.

7. Заключение. Представеният дисертационен труд съдържа научни и научно-приложни резултати, които могат да се разглеждат като принос в научната област.

Допуснатите слабости в изложението обаче (проблеми има в повече от половината резултати в дисертацията) показват, че дисертантът Диана Кирилова Неделчева има пропуски в теоретичните знания и професионалните умения, въпреки че демонстрира и потенциал за научни изследвания.

Поради всичко изложено по-горе, оценката ми основана на представения дисертационен труд е отрицателна и не подкрепям придобиването на ОНС "доктор" от Диана Кирилова Неделчева.

В същото време запазвам правото си, в случай на убедителна защита по време на откритото заседание за защита на дисертацията, да променя оценката си.

април 2015 г.
гр. София