Авторска справка

за научните приноси в трудовете на Илия Д. Илиев, представени за участие в конкурса за професор

За участие в конкурса са представени една монография (1994) и 24 научни статии, публикувани в международни списания през периода 1993-2010. Седем от статиите са самостоятелни, а монографията и 17 от научните статии са с един или двама съавтори. Девет от статиите са публикувани в списания с общ профил, а останалите 15 – в специализирани списания в областта на диференциалните уравнения, нелинейния анализ, динамичните системи, приложенията на анализа и др. Тематично, публикациите се разделят на две групи. Преобладаващата част (всички публикации без тези с номера [1], [4], [21], [25] от списъка) са посветени на *отслабения 16-ти проблем на Хилберт*. Монографията [4] и останалите три статии са посветени на *метода на обратната задача и устойчивостта на бягащи вълни за нелинейни уравнения на математическата физика.*

Отслабен 16-ти проблем на Хилберт

В статиите от този раздел се изследват граничните цикли на двумерни автономни системи с полиномни десни части. Граничен цикъл – това е изолирана периодична фазова траектория. Гранични цикли възникват във фазовия портрет на редица уравнения, моделиращи процеси от реалния свят. Около половината от публикациите в този раздел се занимават с изследването на граничните цикли в квадратични системи. Всички представени резултати са свързани с отслабения вариант на 16-ти проблем на Хилберт. Да напомним, че в списъка от 23 проблема, формулирани в доклада "Математически проблеми", който Хилберт изнася на II Международен конгрес на математиците през 1900 г., като втора част на 16-ти проблем фигурира:

(H) *Да се определи максималният брой и разположението на граничните цикли на Поанкаре за диференциалното уравнение от първи ред*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y(x,y)}{X(x,y)}, \tag{1}$$

където X и Y са полиноми от степен n.

За разлика от много от останалите проблеми в списъка, по решаването на 16-ти проблем (втора част) напредъкът през следващото столетие е малък.

Да означим с $\mathbb{R}_n[x,y]$ пространството от полиноми на x, y с реални коефициенти от степен не по-голяма от n и да запишем (1) като автономна система

$$\begin{aligned}\dot{x} &= X(x,y),\\ \dot{y} &= Y(x,y),\end{aligned} \qquad X,\ Y \in \mathbb{R}_n[x,y], \qquad {}^{\cdot} = d/dt. \tag{2}$$

Нека $N(X,Y)$ е броят на граничните цикли във фазовия портрет на системата (2) при фиксирани $X,\ Y \in \mathbb{R}_n[x,y]$. В оригиналната формулировка на 16-ти проблем по-горе неявно се приема хипотезата, че $N(X,Y) < \infty$. Това е съдържанието на известната теорема на Дюлак от 1923, която бе окончателно доказана едва около 1990 г. едновременно от Écalle и Ильяшенко: *във фазовия портрет на всяка конкретна система* (2) *има краен брой гранични цикли.*

Като следваща стъпка, да дефинираме числото на Хилберт

$$H(n) = \{\sup N(X,Y): \ \ X,\ Y \in \mathbb{R}_n[x,y]\}.$$

Като се изключи тривиалният резултат $H(1) = 0$, досега не е доказано, че $H(n) < \infty$, т.е. че $H(n)$ съществува, даже за квадратичния случай $n = 2$. На примери се вижда, че $H(2) \geq 4$.

Един от възможните подходи за решаването на 16-ти проблем на Хилберт се състои в изследването на промените, които настъпват във фазовия портрет на (2) при непрекъснато изменение на коефициентите. Стартирайки от система, чиито фазов портрет е известен, въпросът е да се изучат всички последващи бифуркации, които възникват при произволни пертурбации на коефициентите. Обаче и най-дългият път започва с първата крачка, която в случая се състои в изследване на бифуркациите на гранични цикли при *малки пертурбации* на коефициентите. Измежду малкото системи, чиито фазови портрети се изследват сравнително лесно, са полиномните системи, притежаващи явен пръв интеграл (в механиката – интеграл на движението, енергия). Такива системи се наричат *интегруеми.* Затова естествено възниква въпросът:

(WH) *Да се определи максималният брой и разположението на граничните цикли на Поанкаре при малки полиномни пертурбации на интегруеми полиномни системи.*

Така формулираният проблем е известен като *отслабен 16-ти проблем* или *инфинитезимален вариант на 16-ти проблем* на Хилберт. В по-подробен запис, става дума за изследване на граничните цикли в полиномната система

$$\begin{aligned} \dot{x} &= M^{-1}H_y + \varepsilon\, f(x,y,\varepsilon), \\ \dot{y} &= -M^{-1}H_x + \varepsilon\, g(x,y,\varepsilon), \end{aligned} \tag{3}$$

където $H(x,y)$ и $M(x,y)$ са съответно първият интеграл и интегриращият множител на несмутената система, $f,\ g \in \mathbb{R}_n[x,y]$ са пертурбациите, а ε е малък параметър. Най-често обект на изследване е случаят, когато непертурбираната система

$$\begin{aligned} \dot{x} &= M^{-1}H_y, \\ \dot{y} &= -M^{-1}H_x, \end{aligned} \tag{4}$$

притежава континуумна и непрекъсната система $\mathcal{A}$ от периодични траектории – периодичен пръстен. Такъв пръстен съществува, ако за всяко h

от някой интервал $\Sigma = (a, b)$, линията на ниво $H(x, y) = h$ съдържа овал $\delta(h)$, който се изменя непрекъснато заедно с $h \in \Sigma$. Овал – това е проста затворена гладка крива, която не съдържа критични точки на H. Тъй като всяка интегруема система с пръстен $\mathcal{A}$ притежава континуум от периодични решения, може да се предположи, че в малка околност на такава система ще се съдържат системи с много гранични цикли. Проблемът е да се определи кои от овалите в $\mathcal{A}$ ще се превърнат след пертурбацията в гранични цикли. Освен тях, и други криви във фазовото пространство на (4) могат да родят гранични цикли – това са критичните точки и сепаратрисните контури. Последните представляват (върху сферата на Поанкаре) затворени криви, състоящи се от последователно свързани една с друга фазови траектории (това означава, че ω-граничното множество на всяка траектория се състои от единствена точка, която съвпада с α-граничното множество на следващата траектория). Най-простият сепаратрисен контур се образува от седло и прилежаща към него хомоклина (сепаратрисна примка, saddle-loop). Ако $M(x, y) = 1$ в (4), оригиналната система е хамилтонова:

$$\dot{x} = H_y, \quad \dot{y} = -H_x. \tag{5}$$

Основен инструмент за откриване на гранични цикли в (2) е изображението на Поанкаре $\mathcal{P}$. Неговите неподвижни точки съответстват на гранични цикли във фазовия портрет. Да напомним конструкцията на $\mathcal{P}$ за система от вида (3). Избираме в равнината отсечка S, която пресича трансверзално семейството от затворени орбити $\mathcal{A}$ в интегруемата система (4). Параметризираме S чрез стойностите h на H (тези стойности се наричат понякога енергетични нива). При зададено ниво $h \in \Sigma$, разглеждаме точката $A_0 = S \cap \delta(h)$ и нека $A_1 \in S$ е точката, в която орбитата на (3) през A_0 пресича отново S за първи път. Тогава, по дефиниция, $A_0 \to A_1 = \mathcal{P}(A_0)$ е изображението на Поанкаре, а разликата

$$d(h, \varepsilon) = H(A_1) - H(A_0) \equiv \mathcal{P}(h, \varepsilon) - h$$

е съответната функция на отместване (displacement map). Всяка изолирана нула на функцията на отместване съответства на граничен цикъл във фазовия портрет на (3).

Изображението на Поанкаре и съответната функция на отместване са аналитични относно h във всеки интервал, който не съдържа критични нива на H (т.е. нива, съответстващи на критични точки на H).

Аналогично се дефинира изображението на Поанкаре в околност на контур. Разликата е, че тогава аналитичността липсва.

Изследването на функцията d може в много случаи да се редуцира до изучаването на нейното първо приближение $M_1(h)$ относно ε, т.е.

$$d(h, \varepsilon) = \varepsilon\, M_1(h) + O(\varepsilon^2).$$

Този подход е приложен за първи път от Понтрягин [A1] през 1934 г. при изследване на системи, близки до хамилтонови. С помощта на (3) първото приближение се пресмята лесно:

$$M_1(h) = \oint_{\delta(h)} M(x,y)[g(x,y,0)dx - f(x,y,0)dy], \qquad h \in \Sigma. \tag{6}$$

Интегралът M_1 се нарича функция на Мелников, въпреки че по-правилно би било "функция на Поанкаре–Понтрягин". Ако пертурбацията е *неконсервативна*, т.е. $M_1 \not\equiv 0$, теоремата за неявната функция (съответно подготвителната теорема на Вайерщрас в случая на кратни корени) дава, че всяка изолирана нула $h_0 \in \Sigma$ на M_1 съответства на граничен цикъл $\gamma(h_0, \varepsilon)$ в (3), който при $\varepsilon \to 0$ клони в хаусдорфова метрика към периодичната орбита $\delta(h_0)$ на несмутената система. При кратен корен, броят на тези цикли съвпада с кратността на h_0. Ако пертубацията е консервативна, се налага изследване на следващото приближение $M_2(h)$,

$$d(h,\varepsilon) = \varepsilon^2 M_2(h) + O(\varepsilon^3),$$

и т.н. Функциите $M_2(h)$, $M_3(h)$, .. се наричат съответно втора, трета и т.н. функция на Мелников. За разлика от $M_1(h)$, пресмятането на висшите функции на Мелников е сериозен проблем.

След тази подготовка, преминаваме към описание на конкретните приноси. Преди това, да въведем един термин.

Дефиниция. Казваме, че конфигурацията $\mathcal{F}$ от ориентирани затворени криви във фазовото пространство на несмутената система (4) има цикличност k относно даден клас от пертурбации, ако в (3) има най-много k гранични цикъла, които при $\varepsilon \to 0$ клонят в хаусдорфова метрика към елементи на $\mathcal{F}$.

Квадратични системи.

В този раздел попадат статиите [2], [3], [5], [6], [7], [8], [9], [16], [20], [22], [23], [24]. През 1989 г. Guckenheimer, Rand and Schlomiuk [A2] доказаха, че цикличността на сепаратрисната примка в неизродена квадратична хамилтонова система е най-много пет и формулираха хипотезата, че истинската цикличност е равна на две. В работа [2] ние доказваме тази хипотеза. Нещо повече, намерена е и общата цикличност на двете сепаратрисни примки (когато са налице). В добавка, в работа [6] наред с други резултати е определена и цикличността на примката в изродените хамилтонови случаи. Получените резултати в това направление могат да се сумират така:

Теорема 1. *Цикличността на сепаратрисната примка в квадратична хамилтонова система при малка квадратична пертурбация е две. Общата цикличност на две сепаратрисни примки е също две. Резултатите са точни.*

Този резултат може да се разглежда като аналог на резултата на Баутин [A3] за цикличност на центъра в квадратична система. Доказателството на Теорема 1 използва изследването на Roussarie [A4] върху изображението на Поанкаре в околност на сепаратрисна примка.

В работа [6] се разглеждат изродените кубични хамилтониани, т.е. тези, при които фазовият портрет в (5) има ос на симетрия. Такъв е стандартният елиптичен хамилтониан $H = y^2 - x^3 + x$, а за всички останали ние въвеждаме следната нормална форма (използвана впоследствие от много други автори)

$$H = x[y^2 + Ax^2 - 3(A-1)x + 3(A-2)], \quad A \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

С модификация на алгоритъма на Françoise [A5], са пресметнати първите четири функции на Мелников $M_k(h)$, $k \leq 4$, когато квадратичната пертурбация във Пфафова форма приема вида

$$dH - \varepsilon\omega_1 = 0, \quad \omega_1 = g(x,y)dx - f(x,y)dy, \quad f, g \in \mathbb{R}_2[x,y] \tag{8}$$

(т.е. коефициентите на f, g не зависят от малкия параметър). След това, наред с резултата включен в Теорема 1, са доказани и следните:

Теорема 2. *Пертурбираната система* (8) *е интегруема (хамилтонова или реверсивна), ако:*

(*i*) $M_1(h) = M_2(h) = M_3(h) \equiv 0$ *и* $A = 0$ *в* (7)*;*

(*ii*) $M_1(h) = M_2(h) = M_3(h) = M_4(h) \equiv 0$ *и* $A \neq -1$ *в* (7)*.*

Теорема 3. *Нека в* (8) H *е стандартният елиптичен хамилтониан. Тогава системата има за малко* ε *и произволни* $f, g \in \mathbb{R}_2[x,y]$ *не повече от 2 гранични цикъла в крайната равнина. Резултатът е оптимален.*

Теорема 4. *При малка квадратична пертурбация* (8)*, общата цикличност на центъра и периодичния пръстен около него, когато той е заграден от параболичен сегмент* ($A = 0$ *в* (7))*, е равна на две. Резултатът е оптимален.*

За хамилтоновия триъгълник ($A = -1$; $H = x[y^2 - (x-3)^2]$ в (7)) са пресметнати $M_1(h), M_2(h), M_3(h)$. Третата функция е изследвана в друга работа [7], където е доказано, че $M_3(h)$ не е абелев интеграл и има вида

$$hM_3(h) = \oint_{H=h} [\alpha x^2 + \beta h + \gamma + \delta(x-1)\ln x] y dx \equiv \alpha I_2 + (\beta h + \gamma) I_0 + \delta I_*, \quad h \in [-4, 0).$$

Установено е, че интегралите I_*, I_0, I_2 удовлетворяват система на Пикар-Фукс от ред 3. С помощта на този факт се доказва

Теорема 5. *При малка квадратична пертурбация* (8)*, общата цикличност на центъра и периодичния пръстен около него, когато той е заграден от триъгълник* ($A = -1$ *в* (7))*, е равна на три. Резултатът е точен.*

При квадратични пертурбации на неизродени хамилтонови векторни полета, е достатъчно изследването на функцията $M_1(h)$, която в тоя случай може да се запише във вида

$$M_1(h) = \iint_{\mathrm{Int}\,\delta(\mathrm{h})} (\alpha x + \beta y + \gamma) dx dy, \quad h \in \Sigma, \tag{9}$$

където $\mathrm{Int}\,\delta(\mathrm{h})$ е вътрешността на овала $\delta(h)$. В работа [3] е предложен нов, геометричен подход за изследване нулите на интеграла (9). Уравнението $M_1(h)=0$ допуска интересна геометрична интерпретация. Да въведем за $h\in\Sigma$ функциите (механични моменти)

$$V(h)=\iint_{\mathrm{Int}\,\delta(\mathrm{h})}dxdy,\quad X(h)=\iint_{\mathrm{Int}\,\delta(\mathrm{h})}xdxdy,\quad Y(h)=\iint_{\mathrm{Int}\,\delta(\mathrm{h})}ydxdy.$$

Очевидно, енергетичното ниво $h\in\Sigma$ е нула на функцията $M_1(h)$ тогава и само тогава, когато централната точка (центроид, център на тежестта) $\xi(h)=X(h)/V(h)$, $\eta(h)=Y(h)/V(h)$ на областта, заградена от овала $\delta(h)$, лежи върху правата $\ell:\ \alpha x+\beta y+\gamma=0$. Всъщност ℓ е правата, върху която дивергенцията на полето в (3) се анулира. Това означава, че *един овал от периодичния пръстен $\mathcal{A}$ поражда граничен цикъл при квадратична пертурбация точно когато централната му точка лежи върху дивергентната права ℓ.* Да означим с $\mathcal{L}$ кривата, образувана от централните точки на фамилията от овали на $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{L}=\{(\xi(h),\eta(h)):\quad h\in\Sigma\}. \tag{10}$$

Ние наричаме $\mathcal{L}$ *центроидна крива* на $\mathcal{A}$. Направените по-горе наблюдения показват, че броят на граничните цикли в (3) е равен на броя на пресечните точки на ℓ и $\mathcal{L}$, а те в крайна сметка се определят от геометрията на $\mathcal{L}$. Важността на предложения геометричен подход се състои във факта, че центроидната крива съдържа пълната информация за възможния брой гранични цикли в (3), въпреки че $\mathcal{L}$ се определя единствено от хамилтониана H и следователно зависи само от два параметъра. Да отбележим, че $M_1(h)$ зависи освен от аргумента си и от пет допълнителни параметъра (два на хамилтониана и три на пертурбацията), което прави изследването на нулите ѝ трудна задача.

Първа стъпка в изследването на (9) и (10) е изборът на нормална форма и описанието на бифуркационната диаграма на хамилтоновото векторно поле. В [3] е предложена следната нормална форма на кубичен хамилтониан с център, която заедно със съответната бифуркационна диаграма е находка и бе възприета като еталон и използвана широко от други автори:

$$H=\frac{1}{2}(x^2+y^2)-\frac{1}{3}x^3+axy^2+\frac{b}{3}y^3,\ \ (a,b)\in\Omega, \tag{11}$$

$$\Omega=\{(a,b):\ \ -\tfrac{1}{2}\le a\le 1,\ 0\le b\le(1-a)\sqrt{1+2a}\}.$$

В [3] е изведена системата на Пикар-Фукс, удовлетворявана от интегралите $V(h)$, $X(h)$, $Y(h)$ и допълнителния интеграл (центробежен момент) $K(h)=\iint_{\mathrm{Int}\,\delta(\mathrm{h})}xydxdy$, изследвана е центроидната крива в околност на крайните ѝ точки. За случая на хамилтониан с 3 седла и център е доказано, че $\mathcal{L}$ е регулярна изпъкнала крива. Оттук следва основният резултат в работата:

Теорема 6. *Нека H е неизроден кубичен хамилтониан с 3 седла и един център. Тогава за малки ε система* (8) *има най-много два гранични цикъла. Резултатът е точен.*

Това е първият точен резултат за броя гранични цикли за отворено множество от хамилтониани в литературата. През 2001, използвайки постановката и резултатите от [3], [2] и [5], както и нови идеи и техники, Гаврилов [*A*6] успя да реши проблема и за останалите два случая в общо положение: две седла и два центъра и едно седло и един център. От своя страна, [3] използва съществено резултатите от [2] и [*A*7].

Обединеният резултат, известен като теорема на Гаврилов, Хорозов и Илиев (виж [*A*8], стр. 339 и [*A*9], стр. 56), е един от основните приноси на българската школа в тематиката:

Теорема. [*A*6] *Нека X е квадратично векторно поле, близко до хамилтоново векторно поле, породено от кубичен хамилтониан с център и четири различни критични нива (две от тях евентуално комплексни). Тогава X има най-много два гранични цикъла. Резултатът е точен.*

В работа [5], публикувана пет години преди получаването на горния окончателен резултат, е разгледан случаят на хамилтониани с централна симетрия. Те съответстват на $a = 0$ в (11) и притежават 2 центъра. Изучавайки съответните две центроидни криви и взаимното им положение, е доказан следният основен резултат:

Теорема 7. *Малка квадратична пертурбация на квадратична хамилтонова система с централна симетрия може да произведе най-много два гранични цикъла. Резултатът е точен.*

В работа [9] се изследват квадратичните пертурбации на всички квадратични системи с център. Показано е, че ако система (4) се запише като уравнение относно комплексната променлива $z = x+iy$, то след подходяща афинна смяна на променливите всяка квадратична система с център (или за по-кратко, квадратичен център) попада в някоя от групите

$$\begin{array}{ll}
\dot{z} = -iz - z^2 + 2|z|^2 + (b+ic)\bar{z}^2, & \text{хамилтонова} \quad (Q_3^H) \\
\dot{z} = -iz + az^2 + 2|z|^2 + b\bar{z}^2, & \text{реверсивна} \quad (Q_3^R) \\
\dot{z} = -iz + 4z^2 + 2|z|^2 + (b+ic)\bar{z}^2, & |b+ic| = 2, \quad \text{с коразмерност 4} \quad (Q_4) \\
\dot{z} = -iz + z^2 + (b+ic)\bar{z}^2, & \text{тип Лотка–Волтера} \quad (Q_3^{LV}) \\
\dot{z} = -iz + \bar{z}^2, & \text{хамилтонов триъгълник}
\end{array}$$

В списъка по-горе a, b, c са реални параметри. Горната класификация се отнася за центъра в началото $z = 0$, а означенията Q_3^H и пр. са възприети от [*A*10]. Ние ще наричаме хамилтоновия триъгълник и системите Q_3^H, Q_4, Q_3^{LV}, когато $c = 0$ в тях *изродени*, а останалите центрове – *неизродени*. В [9] са представени бифуркационните диаграми на фазовите портрети в съответните равнини (a, b) или (b, c). В [9] е доказано още, че за определяне цикличността на периодичния пръстен около центъра в началото е нужна точна оценка отгоре на броя на нулите на $M_1(h)$ (в неизродените случаи), на $M_3(h)$ (за хамилтоновия триъгълник) и на $M_2(h)$ (в другите изродени случаи). Намерени са пертурбациите (наречени "съществени"), които дават максималния възможен брой нули в съответните $M_k(h)$. За тези съществени пертурбации са пресметнати всички съответни $M_k(h)$. В частност, за пресмятането на $M_2(h)$ е предложен нов алгоритъм (изцяло различен от [$A5$]), основан на диференциране по параметър. Като приложение е уточнена кривата в бифуркационната диаграма на Q_3^R, върху която сепаратрисният контур около центъра в началото е с предполагаема цикличност 3. Доказани са още:

Теорема 8. *Цикличността на периодичния пръстен за изродения център от коразмерност четири* $Q_4^+ = \{Q_4 \cap Q_3^R,\ b = 2\}$ *е равна на 3. Резултатът е точен.*

Теорема 9. *Цикличността на периодичния пръстен за изродения изохронен център* $\mathcal{S}_1$ *(съответстващ на* $b = c = 0$ *в* Q_3^{LV}*) е равна на 2. Резултатът е точен.*

Теорема 9 определя правилната цикличност на случая $\mathcal{S}_1$, която в [$A11$] е неправилно посочена като единица, базирайки се на броя нули, които може да има $M_1(h)$, а не $M_2(h)$, както е нужно.

Работа [9] е много добре приета от колегията. Дори само фактът, че в момента, в който пиша тоя текст, статията, стара вече 14 години, стои на второ място в списъка на най-четените за последните 3 месеца публикации от *Bull. Sci. Math.*, е показателен.

В работа [8] е разгледан другият изроден център от коразмерност четири $Q_4^- = \{Q_4 \cap Q_3^R,\ b = -2\}$. Този случай е по-сложен от Q_4^+, защото в $M_2(h)$ участват четири, а не три интеграла. Доказателството експлоатира свойствата на съответната система на Пикар-Фукс от ред 4. Основният резултат е:

Теорема 10. *Цикличността на периодичния пръстен за изродения център от коразмерност четири* $Q_4^- = \{Q_4 \cap Q_3^R,\ b = -2\}$ *е равна на 3. Резултатът е точен.*

В работа [16] се прави за пръв път опит да се изследват бифуркациите на гранични цикли, идващи от безкрайност, в квадратични системи. Доказано е, че има 3 типа системи с елиптична критична точка идваща от безкрайност, заедно с евентуални гранични цикли около нея. Ние показваме, че тези цикли могат да се изследват с помощта на изродена трансформация на координатите, която превръща системата в малка пертурбация на реверсивен център от класа Q_3^R. Съответната функция на отместване притежава развитие в ред на Puiseux относно малкия параметър, а последователните коефициенти се представят чрез абелеви интеграли. Като приложение на тая теория, са разгледани 4 конкретни случая. За илюстрация, тук формулираме един от резултатите.

Теорема 11. *В малка квадратична пертурбация на изохронния център* $\mathcal{S}_3$

($a = 5, b = -3$ в Q_3^R) има най-много 2 гранични цикъла, които клонят към безкрайност като $1/\varepsilon$ при $\varepsilon \to 0$.

В работи [20] и [24] се изследва неизроденият реверсивен случай с коразмерност 1 в Q_3^R, зададен от $a = 2b + 1$, $b \in \mathbb{R} \setminus [-1, \frac{1}{3}]$. В първата работа е разгледан случаят $\frac{1}{3} < b < 3$, когато системата има 2 центъра. Останалите случаи имат единствен център и те са разгледани в [24]. И в двете работи доказателството се базира на свойствата на съответните тримерни системи на Фукс за функциите, участващи в $M_1(h)$ и на редица геометрични съображения. Доказателствата в [24] са значително по-сложни технически и изискват използването на компютърна програма за символни пресмятания. Случаят в [20] се свежда до системата с параметри

$$\begin{aligned} &\dot{x} = -y - 3x^2 + (1 + k)y^2 + \varepsilon(\nu_1 x + \nu_2 xy), \\ &\dot{y} = x(1 - 2y) + \varepsilon\nu_3 x^2, \qquad -1 < k < 1, \quad \nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Теорема 12. *При произволно ν и достатъчно малко ε в (12), са в сила следните твърдения:*
(i) Ако $|k| < \frac{2}{5}$, цикличността на всеки от двата периодични пръстена е три.
(ii) Ако $\frac{2}{5} \le |k| < k_s = 0.60965...$, цикличността на единия периодичен пръстен е три, а на другия е две.
(iii) Ако $k_s \le |k| < 1$, цикличността на всеки от двата периодични пръстена е две.
(iv) Горните граници в (i), (ii), (iii) са точни.

Теорема 13. *Ако при зададено ν и достатъчно малко ε гранични цикли в (12) възникват едновременно от двата периодични пръстена, те са единствени. Тоест, единственото възможно разпределение в тоя случай е $(1, 1)$.*

В работа [20] са представени и съответните бифуркационни диаграми в зависимост от стойностите на k. От своя страна, основният резултат в работа [24] е следният:

Теорема 14. *Цикличността на периодичния пръстен за квадратичния център в Q_3^R зададен от $a = 2b + 1$, $b \in \mathbb{R} \setminus [-1, 3)$ при малка квадратична пертурбация е две и резултатът е точен.*

В работа [22] е предложена програма за намиране цикличността при квадратични пертурбации на периодичните пръстени в квадратични центрове, чиито неизродени комплексифицирани фазови траектории са елиптични криви. Такива центрове сме нарекли центрове от род 1. Освен очевидните хамилтонови случаи, изчерпателният списък в [22] включва 18 реверсивни центъра (т.е. от класа Q_3^R), кръстени $(r1) - (r18)$, 6 изродени и 5 неизродени центъра от тип Лотка-Волтера (т.е. от класа Q_3^{LV}), кръстени съответно $(rlv1) - (rlv6)$ и $(lv1) - (lv5)$, както и центъра Q_4 с коразмерност 4. С поредица от трансформации съответните първи интеграли H и пораждащи функции на Мелников $M_k(h)$ са обединени (където е възможно) и са сведени до по-прости. Намерен е редът на съответната система на Пикар-Фукс за елиптичните интеграли, включени в $M_k(h)$. Формулирани са хипотези за точната цикличност (две или три) за всеки един от случаите. За илюстрация как действа програмата, в [22] са изследвани два от случаите $(r11)$, $(r18)$ и е определена тяхната цикличност (2 гранични цикъла). Доказателството използва комплексификация, свойствата на съответната риманова повърхнина и принципа на аргумента. Накрая да отбележим, че благодарение на усилията и на много други математици, понастоящем програмата предложена в [22] е изпълнена на 80% в частта ѝ за реверсивните случаи.

В работа [23] е разгледан случаят на център с коразмерност 4, който представлява еднопараметрична фамилия от системи. За този случай дотогава не бяха известни никакви резултати, освен че самият център като критична точка има цикличност три. Ние извеждаме системата на Пикар-Фукс и с нейна помощ свеждаме проблема до оценка на нулите на решението на конкретно хипергеометрично уравнение с дясна част в зависимост от нулите на последната. Така се получава оценка от максимум 8 гранични цикъла, породени от периодичния пръстен. Впоследствие нашият резултат бе подобрен до 5 (при хипотеза 3) от Yulin Zhao [A12].

Системи от по-висока степен.

В този раздел попадат статиите [10], [11], [12], [13], [14], [15], [17], [18], [19]. До този момент не е намерена обща формула от типа (6) за втората функция на Мелников $M_2(h)$. В работа [10] е изведена такава формула за случая, когато несмутената система е нютонова, тоест има хамилтониан $H(x,y)=\frac{1}{2}y^2-U(x)$. Да разгледаме съответна малка пертурбация, която е аналитична по отношение на малкия параметър ε,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= H_y+\varepsilon f(x,y,\varepsilon),\\ \dot{y} &= -H_x+\varepsilon g(x,y,\varepsilon).\end{aligned} \tag{13}$$

В горните формули U, f и g са полиноми, но биха могли да бъдат и други достатъчно гладки функции на (x,y). Да предположим, че $M_1(h)$ е тъждествено нула в Σ и да въведем означенията

$$\begin{aligned}D(x,y) &= f_x(x,y,0)+g_y(x,y,0),\\ F(x,y) &= \textstyle\int_0^y f(x,s,0)ds-\int_0^x g(s,0,0)ds,\\ G(x,y) &= \textstyle\int_0^y D(x,s)ds.\end{aligned}$$

Тогава, ако $G(x,y)$ е четна или нечетна функция на y, формулата за втората функция на Мелников има вида

$$M_2(h)=-\oint_{\delta(h)}\frac{F(x,y)D(x,y)}{y}dx+\oint_{\delta(h)}[g_\varepsilon(x,y,0)dx-f_\varepsilon(x,y,0)dy],\quad h\in\Sigma. \tag{14}$$

В случая на произволна $G(x,y) = G_1(x,y) + G_2(x,y)$ с ненулеви нечетна G_1 и четна G_2 части, в (14) се включва и трети интеграл, който се изразява посредством G_1 и G_2. Тези формули показват, че изследването на бифуркации от втори ред отново се свежда към изследването на нулите на абелеви интеграли. Сравнена с (6), формула (14) включва повече независими интеграли. Това означава, че консервативните пертурбации пораждат повече гранични цикли, отколкото неконсервативните. Ясно е, че конкретният вид на $M_2(h)$ зависи не само от хамилтониана и пертурбацията, но и от геометрията на овалите в периодичния пръстен $\mathcal{A}$, за който се прилага формулата. За различните пръстени, видът на $M_2(h)$ след извършване на конкретните пресмятания може да е съвсем различен, дори ако хамилтонианът и пертурбацията са същите.

На получената в [10] формула за $M_2(h)$ е посветена по-голямата част от §4.11 в известната (с 1600 цитирания) книга на Lawrence Perko [A13], където на множество примери е демонстрирано как формулата работи. В [10], ние прилагаме (14) към една конкретна кубична система, възникваща при изследване на особености с нилпотентна линеаризация (Carr [A14], Dangelmayr and Guckenheimer [A15]):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -x - x^3 + \lambda_1 y + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 xy + \lambda_4 x^2 y. \end{aligned} \tag{15}$$

В (15), λ_k са малки параметри, зависещи аналитично от ε. В изследването си [A16], посветено на (15), Chicone установи, че броят на граничните цикли в системата се определя от втората вариация d_2 на функцията на отместване и формулира хипотезата, че тя произвежда два гранични цикъла. В [10] ние доказваме тази хипотеза:

Теорема 15. *Система* (15) *има най-много 2 гранични цикъла при малки стойности на параметрите* λ_j.

В работа [12] са разгледани едновременно системата (15) и сродните ѝ системи, с изрази $-x + x^3$ и $x - x^3$ във второто уравнение. С помощта на разлагане в ред по малките параметри λ_j на функцията на отместване са пресметнати всички функции на Мелников $M_k(h)$, $k = 2, 3, 4, ...$ при предположението, че предходните $k-1$ функции се анулират тъждествено. Доказано е, че $M_k(h)$ има най-много 2 нули, независимо от номера и от вида на периодичния пръстен $\mathcal{A}$. Следователно всеки от тях има цикличност 2. С това покрай другото е поправен погрешният резултат в [A17], където се твърдеше, че цикличността на пръстена около двойната примка за случая $x - x^3$ е три.

В работа [13] се изследват полиномни пертурбации (13) на линейния център $H = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$. Ако означим с $[r]$ цялата част на r, основният резултат е:

Теорема 16. *За произволна полиномна пертурбация от степен n в* (13), *първата ненулева функция на Мелников $M_k(h)$ има не повече от* $[\frac{1}{2}k(n-1)]$

нули в $\Sigma = (0, \infty)$.

Доказателството е основано на специални разлагания на полиномни диференциални едно-форми. Аналогичен проблем се разисква в работа [14], когато хамилтонианът в (13) е $H = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$. За тоя случай е доказано, че първата ненулева функция на Мелников $M_k(h)$ има не повече от $k(n-1)$ нули в $\Sigma = (0, \frac{1}{6})$. Показано е също, че оценката може да се намали с 1 при $k \geq 3$. Доказателството се основава на подходящи декомпозиции на диференциални едно-форми с тегла. Подобно на работа [10], по-голямата част от §4.12 в книгата [A13] пък е посветена на работи [13], [14].

В работа [11] се изследва интегралът (еквивалент на $M_1(h)$)

$$I(h) = \oint_{\delta(h)} [g(x, y)dx - f(x, y)dy], \quad \delta(h) \subset \{H(x, y) = h\}, \quad h \in \Sigma \tag{16}$$

за случая на кубични хамилтониани H с център.

Теорема 17. *Нека n е максималната степен на полиномите f, g. Тогава $I(h)$ има не повече от $5n + 15$ нули в Σ.*

Макар и неточна, простата линейната оценка в Теорема 17 изглежда доста оптимална и реалистична на фона на оценките от тип "итерирана няколко пъти експонента от n", произвеждани от израелската школа. В интерес на истината, техните резултати се отнасят за хамилтониани от произволна степен. Нашето доказателство следва следната схема. Хамилтонианът в (16) се привежда в нормална форма (11) и се доказва, че $I(h)$ принадлежи на $\mathbb{R}[h]$ модул с генератори - четирите интеграла V, X, Y, K от работа [3]. По-точно,

$$I(h) = \alpha(h)X(h) + \beta(h)Y(h) + \xi(h)K(h) + \eta(h)V(h),$$

където степените на полиномите са съответно $[\frac{1}{3}(n-2)]$, $[\frac{1}{3}(n-2)]$, $[\frac{1}{3}(n-3)]$ и $[\frac{1}{3}(n-1)]$. След това се използват свойствата на системата на Пикар-Фукс, удовлетворявана от генераторите, за да се установи, че има линейна комбинация с постоянни коефициенти Z на X, Y, K, такава че Z' и V' удовлетворяват двумерна система. Това е предвидим факт, който произтича от това, че римановата повърхнина на хамилтониана е тор, пунктиран в три точки. Следователно, частното $R = Z'/V'$ удовлетворява уравнение на Рикати с коефициенти - полиноми с известни степени, от което може да се извади оценката. След нашата работа се появиха много статии, които копират схемата, с "linear estimate" в заглавието.

В работа [15] се изследват полиномни пертурбации от степен n на изродени квадратични хамилтонови векторни полета с един център и едно седло (представени в (11) от $b = 0$, $a \in (-\frac{1}{2}, 0)$.)

Теорема 18. *Нека $B \subset \mathbb{R}^2$ е компакт. Ако $M_1(h) \not\equiv 0$, то (13) има най-много $n-1$ гранични цикли в B за ε достатъчно малко. Ако $M_1(h) \equiv 0$ и $M_2(h) \not\equiv 0$, тогава (13) има най-много $2n-2$ гранични цикли в B. И двете оценки са точни.*

Доказателството се основава на формата на M_1 и M_2, получена с подходящо разлагане на полиномни диференциални едно-форми, свойствата на римановата повърхнина и прилагане принципа на аргумента в подходящ контур. При $n = 2$, от Теорема 18 произтича важно следствие:

Следствие 1. *Съществува околност* $\mathcal{U}$ *на* $dH = 0$ *в пространството от всички квадратични векторни полета, така че всяко* $v \in \mathcal{U}$ *има най-много два гранични цикъла.*

Преди да продължим със следващата статия, се нуждаем от една дефиниция.

Дефиниция. За едно $\mathbb{R}$-линейно пространство от функции $\mathcal{V}$ казваме, че е Чебишево в Ω, ако всяка нетривиална функция в $\mathcal{V}$ има най-много $\dim \mathcal{V} - 1$ нули в Ω. За $\mathcal{V}$ казваме, че е Чебишево с точност k в Ω, ако всяка нетривиална функция има най-много $\dim \mathcal{V} + k - 1$ нули в Ω.

В много случаи въпросът за броя на граничните цикли в една смутена система (3) се свежда до оценка на нулите на функция от вида

$$I(h) = p_1(h)I_1(h) + p_2(h)I_2(h), \quad p_1, p_2 \in \mathbb{R}[h], \quad h \in \Sigma, \tag{17}$$

където $\mathbf{I}(h) = (I_1(h), I_2(h))^\top$ удовлетворява система на Пикар-Фукс. В [17] се изследва пространството от функции $\mathcal{V}_s$ от вида (17), където $s \in \mathbb{R}$ е най-малкото число, за което $|I(h)| \le const|h|^s$ в околност на безкрайността в $\mathbb{C}$. За $\mathbf{I}(h)$ се предполага, че удовлетворява двумерна система от вида $\mathbf{I}(h) = \mathbf{A}(h)\mathbf{I}'(h)$, която има свойствата:

(H1) $\mathbf{A}'$ е константна матрица с реални и различни собствени числа λ', μ';
(H2) Уравнението $\det\mathbf{A}(h) = 0$ има реални корени $h_0 < h_1$ и е в сила тъждеството $\mathrm{trace}\mathbf{A}(h) = (\det\mathbf{A}(h))'$;
(H3) $\mathbf{I}(h)$ е аналитична в околност на h_0.

От (H1) и (H2) следва, че характеристическите показатели в ∞ на системата за $\mathbf{I}(h)$ са $-\lambda$ и $-\mu$, където $\lambda\lambda' = \mu\mu' = 1$. Освен това е в сила $\lambda + \mu = 2$. Да означим $\lambda^* = \max(|\lambda - 1|, 1 - |\lambda - 1|)$. Резултатът по-долу показва, че ние можем да оценяваме броя на нулите на функцията от (17), стига да знаем s, λ и μ.

Теорема 19. *Нека са в сила* (H1)-(H3), $\lambda \notin \mathbb{Z}$ *и* $s \ge \lambda^*$. *Тогава:*

(*i*) *Пространството* $\mathcal{V}_s$ *е Чебишево с точност* $1 + [\lambda^*]$ *в* $\mathbb{C} \setminus [h_1, \infty)$.

(*ii*) $\dim \mathcal{V}_s = 2s - 1$ *ако* $\lambda - \mu$ *и* $s - \frac{1}{2}$ *са цели,* $\dim \mathcal{V}_s = [s - \lambda] + [s - \mu] + 2$ *иначе.*

В [17], горният общ резултат е приложен към 9 примера, в които броят на граничните цикли се определя от броя на нулите в (17). Предоказани или усилени са някои добре известни резултати и са получени няколко нови.

В.И. Арнолд формулира през 1990 г. в [A18] следния проблем. *Дали* g*-мерното пространство от абелеви интеграли*

$$I(h) = \oint_{\delta(h)} \frac{(\alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_{g-1}x^{g-1})dx}{y}, \quad h \in \Sigma, \tag{18}$$

където $\delta(h) \subset \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y^2 + P(x) = h\}$, $g = [\frac{1}{2}(\deg P - 1)] \geq 2$, *е чебишево пространство?* В работа [18] ние даваме негативен отговор на този въпрос, като конструираме нютонов хамилтониан от степен n в (18), за който $I(h)$ има $[\frac{3}{2}g] - 1$ прости нули. Следователно пространството от интергали (18) не е чебишево. Напомняме, че g е родът на хипералиптичната крива. В [18] е разгледан в детайли случаят на хамилтониан от степен 5 с център. Ние въвеждаме следната нормална форма за тоя случай:

$$H(x,y) = \frac{1}{2}y^2 - \frac{\lambda\mu}{2}x^2 + \frac{\lambda + \mu + \lambda\mu}{3}x^3 - \frac{1 + \lambda + \mu}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5, \tag{19}$$

където или $0 \leq \mu \leq \lambda \leq 1$ (реален случай), или $\bar{\mu} = \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ (комплексен случай). Описана е бифуркационната диаграма в (λ, μ)-равнината в реалния случай (в комплексния няма такава), представени са диаграмите на Дынкин. Ще отбележим, че (19) и бифуркационната диаграма добиха популярност и се използват от други автори. За периодичния пръстен около центъра в $(1,0)$ са отделени два случая, по един в реалния и комплексния случай, наречени *изключителни.* В реалния случай условието е $0 < \mu < \lambda < 1$, а в комплексния $\mathrm{Re}\lambda < 0, (\mathrm{Im}\lambda)^2 < 5\mathrm{Re}\lambda(\mathrm{Re}\lambda - 1)$. Основният резултат в [18] е следният.

Теорема 20. *Нека* $\{\delta(h),\ h \in \Sigma\}$ *е изключителна фамилия от овали. Тогава пространството от абелеви интеграли*

$$I(h) = \oint_{\delta(h)} \frac{(\alpha_0 + \alpha_1 x)dx}{y}, \quad h \in \Sigma \tag{20}$$

е чебишево.

Това е първият резултат от подобен характер в литературата. За останалите фамилии от овали в случая $\deg H = 5$, в [18] е формулирана хипотеза за броя на нулите на (20).

В работа [19] е изследвана *генериращата функция* при малки еднопараметрични пертурбации (13) на хамилтонови системи. Това е първата ненулева функция на Мелников $M_k(h)$ в развитието на функцията на отместване по малкия параметър. Изучено е аналитичното продължение на $M_k(h)$ в комплексна област. Дадено е геометрично описание на групата от монодромиите на пораждащата функция, на базата на което са получени достатъчни условия за да удовлетворява тя уравнение на Фукс или на Пикар-Фукс. Във втория случай пораждащата функция е абелев интеграл. В детайли са разгледани хамилтоновият триъгълник $H = x[y^2 - (x-3)^2]$ и осцилаторът на Дюфинг $H = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{4}(x^2-1)^2$. В първия случай, пораждащата функция при квадратични пертурбации е $M_3(h)$, тя не е абелев интеграл и удовлетворява уравнение на Фукс от ред 3, което е изведено в работата. Във втория случай ние доказваме, че $M_k(h)$ е абелев интеграл за всяка полиномна пертурбация от степен n и за всяко k и я пресмятаме. С това опровергаваме част от резултатите в [А19]. На базата на получените формули за $M_k(h)$ ние даваме горна граница в термините на n, k

за броя на граничните цикли в (13), произведени от съответния периодичен пръстен $\mathcal{A}$. Същото е направено за случаите на глобален център $H = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{4}(x^2+1)^2$ и на "скъсено махало" $H = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{4}(x^2-1)^2$.

Метод на обратната задача на разсейване и устойчивост на бягащи вълни

В този раздел попадат статиите [1], [21], [25] и монографията [4]. Откриването от Gardner, Greene, Kruskal и Miura на метода на обратната задача на разсейване за решаване уравнението на Кортевег - де Фриз е едно от най-големите открития в математическата физика през 20-ти век. Възникна цяла нова област с десетки хиляди публикации на физици и математици. В монографията [4] са представени вижданията, пристрастията и резултатите на авторите по тая обширна тематика, като е наблегнато на математическата страна на проблема. В издадената в Института по теоретична физика "Л.Д. Ландау" към РАН *Энциклопедия интегрируемых систем* (под редакцията на А.Б. Шабат), [4] е цитирана заедно с още 92 книги по темата, издадени през последните 50 години. Монографията съдържа обширен увод за метода на обратната задача, четири глави и списък от литература с 251 заглавия. Първите три глави са посветени на метода на обратната задача, а четвъртата на устойчивостта на бягащи вълни. За тази монография авторите получиха Академичната награда на БАН за математически науки през 1998.

Математическите основи за изследването на устойчивостта на уединени вълни за нелинейни уравнения бяха поставени в статиите на T.B. Benjamin [A20] и J.L. Bona [A21]. Впоследствие, обща абстрактна схема бе предложена от M. Grillakis, J. Shatah и W. Strauss в двете части на [A22]. Подходящият контекст за изследване е орбиталната устойчивост в метриката, породена от пространствата на Соболев $H_1(\mathbb{R}_x)$, което гарантира устойчивост на формата на вълната. Орбитата се състои от групата на транслациите, а в комплексния случай към нея се прибавя и групата на ротациите.

В работа [1] ние изследваме устойчивостта на стоящата вълна $u(x,t) = \phi(x)e^{i\omega t}$ за общ клас от уравнения на Шрьодингер

$$\begin{aligned} &iu_t = -u_{xx} + u[f(|u|^2) + 2kh'(|u|^2)(h(|u|^2))_{xx}], \\ &u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}; \quad 0 \le t < T; \quad k \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{21}$$

Ние показваме, че схемата от [A22] може да се приспособи и за такова общо уравнение като (21). За вълните, които заедно с първите си две производни клонят към нула при $|x| \to \infty$ е доказано, че са орбитално устойчиви(неустойчиви), когато $L_2(\mathbb{R}_x)$-нормата $||\phi||$ е растяща(намаляваща) функция на параметъра ω. Ние предлагаме и удобна формула за пресмятане на $\partial_\omega(||\phi||^2)$, която прилагаме към редица примери с конкретни f, h за определяне на устойчивите и неустойчиви случаи.

В работи [21], [25] се изследва устойчивостта на периодични бягащи вълни. Това е сравнително нова и неразработена област. В [21] се изследват периодичните вълни $\varphi(x-vt)$ за уравнението

$$u_t + (a(u))_x - u_{xxt} = \left(b'(u)\frac{u_x^2}{2} + b(u)u_{xx}\right)_x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0. \tag{22}$$

Това уравнение съдържа като частен случай уравненията CH (Camassa-Holm) и BBM (Benjamin-Bona-Mahony). За разлика от случаите на уединена вълна, когато основна роля в доказателствата играе спектрално разлагане, свързано със спектралната задача на Щурм-Лиувил с потенциал, клонящ към нула в безкрайност, в периодичния случай се прилага теорията на Флоке за уравнението на Хил. Като приложение на развитата в първата част на работа [21] теория, са доказани пет резултата за устойчивост на различни частни случаи в (22), когато периодичната вълна има произволно фиксиран основен период T и не осцилира около нулата. В работата за първи път в литературата е демонстрирана важната роля, която играят свойствата на абелевите интеграли (основен елемент на изложението в първата част на тоя текст) при изследване на устойчивостта в периодичния случай.

В последната работа от списъка [25] се изследва устойчивостта на периодичното решение

$$u = \varphi(x,t) = e^{i\omega(x+(3a+\omega^2)t)} r(x + (a+3\omega^2)t), \quad a, \omega \in \mathbb{R}$$

на комплексното модифицирано уравнение на Кортевег - де Фриз CMKdV

$$u_t + 6|u|^2 u_x + u_{xxx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0. \tag{23}$$

Да дефинираме (псевдо)метриката

$$d(u,\varphi) = \inf_{(\eta,\xi)} ||u(x,t) - e^{i\omega\eta}\varphi(x-\xi,t)||_1.$$

Основният резултат в работа [25] е:

Теорема 21. *Нека $r \neq 0$. Тогава за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$, така че ако $u(x,t)$ е решение на* (23) *и $d(u,\varphi)|_{t=0} < \delta$, то $d(u,\varphi) < \varepsilon$ $\forall t \in [0,\infty)$.*

Доказателството следва собствена схема и не използва факти или идеи от [A22]. Благодаря за вниманието и търпението ви.

Литература

[A1] Л.С. Понтрягин, О динамических системах близких к гамильтоновым, ЖЭТФ **4** (1934) no. 8, 883–885.

[A2] J. Guckenheimer, R. Rand and D. Schlomiuk, Degenerate homoclinic cycles in perturbations of quadratic Hamiltonian systems, *Nonlinearity* **2** (1989), 405–418.

[A3] Н.Н. Баутин, О числе предельных циклов рождающихся при изменении коэффициентов из состояния равновесия типа фокуса или центра, *ДАН СССР* **24** (1939) no. 7; *Матем. сб.* **30** (1952) no. 1, 181–196. [English transl. On the number of limit cycles which appear with the variations of the coefficients from an equilibrium point of focus or center type, in: *AMS Translations–Series* 1, **5** (1962), 396–413].

[A4] R. Roussarie, On the number of limit cycles which appear by perturbation of separatrix loop of planar vector fields, *Bol. Soc. Bras. Mat.* **17** (1986), 67–101.

[A5] J.-P. Françoise, Successive derivatives of a first return map, application to the study of quadratic vector fields, *Ergod. Theory Dynam. Syst.* **16** (1996) no. 1, 87–96.

[A6] L. Gavrilov, The infinitesimal 16th Hilbert problem in the quadratic case, *Invent. Math.* **143** (2001) no. 3, 449–497.

[A7] L. Gavrilov and E. Horozov, Limit cycles of perturbations of quadratic Hamiltonian vector fields, *J. Math. Pures Appl.* **72** (1993), 213–238.

[A8] Yu. Ilyashenko, Centennial history of Hilbert's 16th problem, *Bull. Amer. Math. Soc.* **39** (2002), no. 3, 301–354.

[A9] Sergei Yakovenko, *Quantitative theory of ordinary differential equations and the tangential Hilbert 16th problem*, in: Dana Schlomiuk (Ed.), *On Finiteness in Differential Equations and Diophantine Geometry*, CRM Monograph Series, vol. 24, pp. 41–110. AMS, Provivdence, RI, 2005. ISBN 0-8218-2805-3

[A10] H. Żołądek, Quadratic systems with center and their perturbations, *J. Differential Equations* **109** (1994) no. 2, 223–273.

[A11] C. Chicone and M. Jacobs, Bifurcations of limit cycles from quadratic isochrones, *J. Differential Equations* **91** (1991), 268–326.

[A12] Yulin Zhao, On the number of limit cycles in quadratic perturbations of quadratic codimension-four centres, *Nonlinearity* **24** (2011), 2505–2522.

[A13] Lawrence Perko, *Differential Equations and Dynamical Systems*, Texts in Applied Mathematics 7, 3rd edition, Springer-Verlag, New York (2001), 562 pp.

[A14] J. Carr, *Applications of centre manifold theory*, Springer-Verlag, New York (1981).

[A15] G. Dangelmayr and J. Guckenheimer, On a four parameter family of planar vector fields, *Arch. Rat. Mech. Anal.* **97** (1987) no. 4, 321–352.

[A16] C. Chicone, On bifurcation of limit cycles from centers, in: J-P. Francoise, R. Roussarie (eds.), *Bifurcations of planar vector fields*, Lect. Notes in Mathematics **1455**, Springer-Verlag (1990), pp 20–43.

[A17] A. Jebrane and H. Żołądek, Abelian integrals in non-symmetric perturbation of symmetric Hamiltonian vector fields, *Adv. Appl. Math.* **15** (1994), 1–12.

[A18] V.I. Arnol'd, Ten problems, in: *Theory of singularities and its applications*, Adv. Soviet Math. **1**, AMS, Providence (1990), pp 1–8.

[A19] A. Jebrane, P. Mardešić and M. Pelletier, A generalization of Francoise's algorithm for calculating higher order Melnikov functions, *Bull. Sci. Math.* **126** (2002) no. 9, 705–732.

[A20] T. B. Benjamin, The stability of solitary waves, *Proc. R. Soc. London* A **328** (1972), 153–183.

[A21] J. L. Bona, On the stability theory of solitary waves, *Proc. R. Soc. London* A **344** (1975), 363–374.

[A22] M. Grillakis, J. Shatah and W. Strauss, Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry I, II, *J. Funct. Anal.* I: **74** (1987), 160–197, II: **94** (1990), 308–348.

15 януари 2012 (Илия Д. Илиев)