АВТОРСКА СПРАВКА

на гл. ас. д-р **Ирина Красимирова Георгиева**

секция „Математическо моделиране и числен анализ“, ИМИ-БАН,
представена за участие в конкурс за **доцент** в професионално направление
4.5 Математика, научна специалност Математическо моделиране и приложения на математиката (Теория на апроксимациите и приложения), ДВ бр. 87/ 31.10.2017 г.

Списъкът с публикациите за участие в цитирания по-горе конкурс включва 14 работи, от които:

- 9 статии [1-9] в научни списания с импакт фактор (IF);
- 3 статии [10-12] в научни поредици с импакт ранг (SJR);
- 2 статии в реферирани сборници от международни конференции [13, 14];
- Статиите не са използвани за придобиване на ОНС „доктор“ и за придобиване на длъжност главен асистент;

1. Апроксимиране с Радонови проекции

Голяма част от статиите по конкурса - [3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14] са посветени на създаването на нови математически методи и алгоритми за възстановяване на функция на две променливи въз основа на информация от тип Радонови проекции (линейни интеграли върху хорди на единичната окръжност) на функцията и затова започваме с увод в тематиката и състояние на научните изследвания.

Увод

Трансформацията на Радон[1] е един вид интегрално преобразование, на което се основават томографските методи за реконструкция на обекти с нехомогенна плътност. Тези методи впоследствие намират приложение в най-разнообразни области – медицина, електронна микроскопия, изследване на земните недра, изследване на плазмата, контрол на потоци в тръбопроводи и много други.

От математическа гледна точка, задачата в томографията се свежда до възстановяване на функция на няколко променливи въз основа на информация от тип Радонови проекции, т.е. интеграли по отсечки от неизвестната функция. През последните десетилетия бяха положени значителни усилия за разработването на достатъчно ефективни алгоритми за решаването на тази задача. Тези методи са най-общо казано два типа – интегрални и алгебрични. Интегралните методи се базират на преобразованието на Радон, където всички разглеждания са в непрекъснат вид и се преминава към дискретизация при непосредствената реализация на алгоритъма за реконструкция. При алгебричните методи дискретизация се осъществява в самото начало на изследванията и задачата се свежда до решаване на система линейни уравнения.

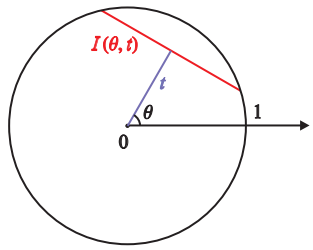
[1] J. Radon, Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten, Ber. Verch. Sächs. Akad., 69, 1917, 262–277.

Постановка на задачата и исторически бележки

Йохан Радон през 1917 г. доказва, че всяка диференцируема в единичния кръг функция $f(x)$ еднозначно се определя чрез своята *Радонова трансформация*

$$\mathcal{R}_\theta(f;t) = \int_{I(\theta,t)} f(x)\,dx,$$

където $I(\theta,t)$ е хорда на единичната окръжност, определена от ъгъл с мярка $0 \le \theta < \pi$ и разстояние t до центъра, $-1 \le t \le 1$.



По-нататъшни резултати в тази област са получени от F. John[2] през 1935 г..

През последните десетилетия редица изявени апроксиматори обърнаха поглед към тази тематика. Задачата за възстановяване на функция по линейни интеграли е формулирана като интерполационна задача – за намиране на полином на няколко променливи, по дадени Радонови проекции върху конфигурация от хорди. Най-общо търсим $u \in P$, така че

$$\int_I u(x)\,dx = \gamma_I \qquad \forall I \in \mathcal{I}, \tag{1}$$

където P е подходящо (обикновено полиномиално) пространство от реални функции, дефинирани в единичния кръг, $\mathcal{I}$ е фамилия от хорди на единичната окръжност и за всяка хорда $I \in \mathcal{I}$ е предварително зададена стойността $\gamma_I \in \mathbb{R}$. Обикновено се предполага $|\mathcal{I}| = \dim P$ за да бъдат равни броят на уравненията и на неизвестните. Схемата от хорди $\mathcal{I}$ се нарича *регулярна*, ако интерполационната задача (1) има единствено решение при произволен избор на данните $\{\gamma_{\mathcal{I}}\}$ в дясната част.

Случаят, когато P е пространството Π_n^2 от полиноми на две променливи и обща степен най-много n, е изследван интензивно през 70-то и 80-те години на миналия век. През 1974 г. R. Marr[3] доказва, че полином на две променливи се определя еднозначно от своите линейни интеграли върху хордите, свързващи краен брой равноотдалечени точки върху единичната окръжност. По-късно А. Акопян[4] показва, че един полином на две променливи и обща степен най-много n може да бъде възстановен еднозначно по своите линейни интеграли, пресметнати върху конфигурация от $\binom{n+2}{2} (= \dim \Pi_n^2)$ хорди, свързващи произволни $n+2$ точки от единичната окръжност (както и по-общ

[2] F. John, Abhängigkeiten zwischen den Flächenintegralen einer stetigen Funktion, Math. Anal., 111, 1935, 541-551.

[3] R. Marr, On the reconstruction of a function on a circular domain from a sampling of its line integrals, J. Math. Anal. Appl., 45, 1974, 357–374.

[4] H. Hakopian, Multivariate divided differences and multivariate interpolation of Lagrange and Hermite type, J. Approx. Theory, 34, 1982, 286–305.

резултат за многомерния случай). Публикации в тази област имат редица известни математици, напр. A. Cavaretta, C. Micchelli, A. Sharma, B. Logan, L. Shepp и много други.

Върху този тип задачи за приближения, интензивни изследвания бяха проведени в България от колектив учени, формиран около акад. Борислав Боянов (Гено Николов, Гергана Петрова, Румен Улучев, И. Георгиева и др.).

Възстановяване на полиноми на две променливи с използване на информация от тип Радонови проекции върху фамилия схеми от хорди, взети в няколко направления, като хордите във всяко направление са успоредни са изучавани от Б. Боянов и И. Георгиева[5].

Друга фамилия регулярни схеми от хорди е предложена от Б. Боянов и Ю. Ксю през 2005 г.. И. Георгиева и С. Исмаил[6] доказват, че конкретна схема от хорди, определена чрез нулите на полиномите на Чебишов от втори род, осигурява единственост на поставената интерполационна задача.

1.1. Апроксимиране с алгебрични полиноми

Разглеждаме задача (1) в пространството $P = \Pi_n^2$ от алгебрични полиноми на две променливи и обща степен най-много n:

За дадена схема от $\binom{n+2}{2}$ хорди $\mathcal{I} = \{I_k,\ k = 1, \ldots, \binom{n+2}{2}\}$ на единичната окръжност в равнината, търсим алгебричен полином $u \in \Pi_n^2$, удовлетворяващ интерполационните условия:

$$\int_I u(x)\, dx = \gamma_I \qquad \forall I \in \mathcal{I},$$

Б. Боянов и И. Георгиева предлагат конфигурация от $\binom{n+2}{2}$ хорди, взети в $n+1$ различни посоки, като в първата група има $n+1$ успоредни хорди, във втората - n успоредни хорди, и т. н.. Те дават достатъчно условие, схема от хорди от този тип да бъде регулярна.

Използвайки това условие в статията [9] доказваме регулярност на няколко конфигурации от хорди. По-точно, схема от този тип е регулярна, ако разстоянията на хордите до центъра в съответно първата група от $n+1$ успоредни хорди са точно равни на нулите на полинома на Чебишев от първи род $T_{n+1}(x)$, във втората група от n успоредни хорди, разстоянията до центъра им са равни на най-малките n нули на $T_{n+1}(x)$, и т. н., като разстоянието на хордата от последната група е равно на най-малката нула на $T_{n+1}(x)$. Доказани са и аналогичен резултати, когато разстоянията на хордите до центъра са асоциирани с нулите на на полинома на Чебишев от втори род $U_{n+1}(x)$ и с нулите на ортогоналните полиноми на Якоби $P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x)$ при $\alpha = 1/2$, $\beta = -1/2$ и $\alpha = -1/2$, $\beta = 1/2$.

[5] B. Bojanov, I. Georgieva, Interpolation by bivariate polynomials based on Radon projections, Studia Mathematica, 2004, Vol. 162(2), 141-160.

[6] 1. I. Georgieva, S. Ismail, On recovering of a bivariate polynomial from its Radon projections. In "Constructive Theory of Functions, Varna 2005"(B. Bojanov, Ed.), 127-134, Marin Drinov Academic Publishing House, Sofia, 2006.

В статия [9] разглеждаме и задачата за изглаждане на смесен тип данни (Радонови проекции и функционални стойности в краен брой точки на единичната окръжност) по метода на най-малките квадрати. Намираме условия, при които съществува и то единствен полином на две променливи, който най-добре приближава по метода на най-малките квадрати данни от смесен тип при произволни тегла.

В статия [12] извеждаме представяне на интерполационния полином във вида на Лагранж чрез базисни полиноми за задачата (1) за интерполиране с алгебрични полиноми. Доказваме и едно интересно свойство на базисните интерполационни полиноми на Лагранж. Представени са числени експерименти за възстановяване на повърхнини.

В публикацията [14] е намерена регулярна схема от смесен тип – конфигурация от $\binom{n+2}{2} - (n+1)$ хорди и $(n+1)$ точки върху единичната окръжност, така че интерполационната задача за полином от степен n по тази схема да има винаги единствено решение. Данните тук са $\binom{n+2}{2} - (n+1)$ стойности на Радонови проекции и $(n+1)$ функционални стойности. Да отбележим, че спазваме презумпцията методите за реконструкция да са „безразрушителни“, тъй като използването на информация в точки от единичната окръжност не нарушава този принцип. Направените числени експерименти показват, че използването на тази нова схема е удачно, когато искаме да апроксимираме по-точно по границата. Също така е направено числено сравнение на схеми от смесен тип и схеми, разглеждани в статия [9].

Апроксимиране на функции, удовлетворяващи ЧДУ

Идеята върху която акцентираме тук, е използването на допълнителна информация за неизвестната функция $u \in P$ в апроскимационната схема (1). Естествено е това да подобри точността на приближението и в същото време да намали значително необходимите изчислителни ресурси. Освен това, използването на допълнителна информация за решението, би могло да редуцира количеството измервания, респективно Радоновите проекции, необходими за постигането на същата точност на приближение. В задачата (1) по-горе, това се изразява в по-малко множество $\mathcal{I}$ от хорди.

Много често в приложните задачи допълнително условие върху апроксимираната и/или апроксмиращата функция е тя да удовлетворява частно диференциално уравнение (ЧДУ) от някакъв вид. При горните предположения това означава да ограничим пространството P до функции, които са адаптирани в някакъв смисъл към разглежданата задача.

Резултатите ни показват, че много от изброените по-горе преимущества се реализират с предложената от нас техника. Наред с разработването на теоретична основа на задачата са направени и редица числени експерименти, за да се изследват и демонстрират по-прецизно тези ефекти. Като помощен апарат при теоретичната обосновка и практическото приложение на разработените алгоритми са използвани програмни пакети за числени и символни пресмятания.

1.2. Хармонични функции

Един пример за използване на специфична за разглежданата задача информация е, ако *a priori* знаем, че функцията, която ще интерполираме е хармонична, т.е. удовлетворява уравнението на Лаплас $\Delta u = 0$. Това елиптично ЧДУ е важно както като моделна задача, така и поради многобройните му приложения в изследвания върху топлопроводимостта, дифузията, потоците от несвиваеми течности.

Съвсем естествено е да искаме да апроксимираме хармоничните функции с хармонични полиноми. Ето защо избираме $P = \mathcal{H}_n$, където

$$\mathcal{H}_n = \left\{ p \in \Pi_n^2 : \Delta p = 0 \right\}$$

е пространството от реалните хармонични полиноми на две променливи от обща степен най-много n. Пространството $\mathcal{H}_n$ има размерност $2n+1 (<< \dim \Pi_n^2)$. Аналогично на (1), разглеждаме схема от хорди на единичната окръжност $\mathcal{I}$, $|\mathcal{I}| = 2n+1$ и асоциирани дадени стойности $\{\gamma_I\}$. Търсим хармоничен полином $p \in \mathcal{H}_n$, такъв че

$$\int_I p(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \gamma_I \qquad \forall I \in \mathcal{I}. \tag{2}$$

Наричаме схемата от хорди $\mathcal{I}$ *регулярна*, ако интерполационната задача (2) има единствено решение за всеки избор на стойностите $\{\gamma_I\}$.

В поредица статии разглеждаме задачи за апроксимиране на хармонични функции чрез информация за Радоновите им проекции и описваме няколко фамилии от регулярни схеми от хорди.

В статия [7] са представени първите ни резултати за интерполиране на хармонични функции с хармонични полиноми. В нея разглеждаме задачата за интерполиране на хармонична функция с хармоничен полином от $\mathcal{H}_n$, като входните данни са $2n+1$ стойности на нейни Радонови проекции. Използвайки интензивно техники от символните пресмятания, показваме че тази интерполационна задача има единствено решение в случая, когато хордите $\mathcal{I}$ образуват правилен многоъгълник, вписан в единичната окръжност. Използвани са алгоритъмът на Петковшек “Hyper“, алгоритъмът “creative telescoping“ на Цилбергер и особено интензивно пакетът на Mathematica “HolonmicFunctions“, разработен от Кристоф Кучан. Представени са числени експерименти за тази и по-общи схеми от хорди.

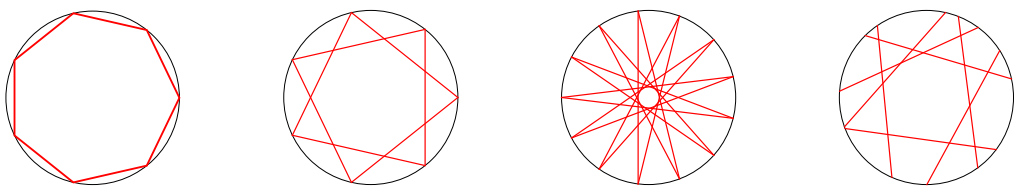
В статия [11] продължаваме изследването на тематиката и се фокусираме върху един алгебричен метод за възстановяване на хармонична функция чрез краен брой стойности на нейните Радонови проекции. За случая когато хордите са равномерно разположени в окръжността и са на еднакво разстояние от центъра, представяме ефективен алгоритъм за приближено възстановяване с хармоничен полином, който е устойчив по отношение на шум във входните данни. Направените числени експерименти за възстановяване на функции, които са C^∞ в затворения кръг показват експоненциална сходимост. За функции с по-малка гладкост по границата наблюдаваме по-ниска скорост на сходимост.

Най-общите теоретични резултати са представени в статия [6]. Тук разработваме алгебричен метод за реконструиране на хармонична функция в единичния кръг въз основа на краен брой от нейните Радонови проекции. Подходът е да се търси хармоничен полином, който има същите Радонови проекции върху дадените хорди на единичната окръжност. Извеждаме формула за пресмятане на базисните хармонични полиноми, която може да бъде разглеждана като хармоничен аналог на класическата формула на Мар от 1974.

Използваме този ключов резултат, за да изведем обща теорема за съществуване и единственост на интерполационния хармоничен полином от степен n за фамилия от схеми от хорди, за които всички хорди отстоят на едно и също разстояние t до началото, такова че t не е нула на нито един от полиномите на Чебишев $U_1, \ldots, U_n$ от втори род. С други думи, показваме че схеми от хорди от вида

$$\mathcal{I} = \{I(\theta_\ell, t)_{\ell=1}^{2n+1}, \quad 0 \le \theta_1 < \cdots < \theta_{2n+1} < 2\pi, \quad t : U_k(t) \neq 0,\ k = 1 \ldots, n\}$$

са регулярни.



За случая, когато Радоновите проекции са взети по хорди с равномерно разпределени ъгли в интервала $[0, 2\pi]$, представяме явна формула за обратната матрица на матрицата, съответстваща на интерполационната задача. Коефициентите на интерполационния полином са пресмятат за малко по-бавно от линейно време.

За специалния случай, когато Радоновите проекции са взети по хорди, които образуват правилен многоъгълник, вписан в единичната окръжност е направен и детайлен анализ на съответния метод. Изведени са оценки на грешките (на интерполационната схема) в единичния кръг и в единичната окръжност в L_2-нормата и в супремум-нормата. Показваме, че числото на обусловеност на матрицата, съответстваща на интерполационната задача е равномерно ограничено от малка константа, независеща от степента на полинома.

Числените експерименти показват скорост на сходимост, съответстваща на аналитично изведентата от нас. За функции, които са C^∞ в затворения кръг сходимостта е експоненциална, а за функции с по-малка гладкост по границата - съответно по-бавна.

В статия [3] продължаваме търсенето на регулярни схеми от хорди $\mathcal{I}$ във връзка със задача (2). Доказваме, че регулярността на схема от хорди е инвариантна относно ротация. Показваме, че не съществува регулярна схема с повече от $n+1$ успоредни хорди.

В първата част на тази работа схемите от $2n+1$ хорди, които разглеждаме са разделени на две групи, като хордите във всяка група са успоредни. Следователно

регулярните схеми от този вид могат да се състоят от $n+1$ хорди по една посока и n хорди по друга. Извеждаме необходимо и достатъчно условие схема от този тип да бъде регулярна.

Като втори основен резултат представяме някои обобщения на предишни наши резултати (от [6]) за схеми от хорди с равноотдалечени ъгли и еднакво разстояние до началото. Намираме по-широк клас от регулярни схеми от хорди в термините на допустим интервал на разстоянията им до началото. Получаваме и нови оценки за грешката при интерполиране на хармонични функции чрез хармонични полиноми в дробни Соболеви пространства, като входните данни са стойностите на Радоновите проекции на хармоничните функции върху хордите от съответните регулярни схеми.

В статия [10] разглеждаме преопределения случай, а именно обработката на „твърде голямо“ количество данни, $|\mathcal{I}| > \dim \mathcal{H}_n$, по метода на най-малките квадрати. Доказваме достатъчни условия за съществуване и единственост на хармоничния полином, „изглаждащ“ данните чрез метода на най-малките квадрати. Комбинирайки този резултат и резултати от статия [6], разработваме един алгоритъм с практически приложения. Разглеждаме също така и изглаждане върху по-общи данни, състоящи се от Радонови проекции и функционални стойности (по границата, за да не се нарушава идеята на недеструктивното възстановяване). Направено е сравнително числено изследване на подхода, използващ метода на най-малките квадрати с два други метода за реконструкция в случая на данни с шум. Получените алгоритми са реализирани и са представени числени експерименти.

Статиите [5] и [13] са посветени на извеждане на кубатурни формули за хармонични функции, използващи информация от тип Радонови проекци.

В статия [5] конструираме клас кубатурни формули за хармонични функции в единичния кръг, основани на линйните интеграли по $2n+1$ различни хорди. Хордите отстоят на едно и също разстояние t до началото и имат равноотдалечени ъгли в интервала $[0, 2\pi]$. Ако разстоянието t е подходящо избрано, тези кубатурни формули са точни за всички хармонични полиноми от степен до $4n+1$, което е и максималната постижима степен на точност за такъв клас от кубатурни формули.

За хорди в по-общо положение - с произволни ъгли и на едно и също разстояние от началото, представяме клас от интерполационни кубатурни формули, за който показваме, че съвпада с предишната формула в случая на хорди с равноотдалечени ъгли. За специален случай на кубатурна формула от този клас даваме оценка за грешката и предоставяме числени експерименти.

В статия [13] конструираме клас от кубатурни формули за хармонична функция, основани на стойностите на интеграли от функцията върху $4n+2$ различни хорди, разделени на две групи с равен брой хорди. Хордите във всяка една от тези групи имат едно и също разстояние до центъра на окръжността, съответно t_1 и t_2, и равноотдалечени ъгли в интервала $[0, 2\pi]$. Показваме, че ако t_1 и t_2 са избрани подходщо, съответните кубатурни формули са точни за всички хармонични полиноми от степен до $8n+3$. Представяме и някои числени експерименти. Трябва да отбележим, че това е първият резултат за схеми от хорди, които имат различни разстояния до началото.

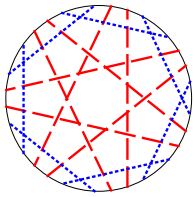


Схема от хорди, състояща се от 2 множества от хорди с равноотдалечени ъгли и разстояния до началото съответно t_1 и t_2.

1.3. Апроксимации, използващи решения на нехомогенни ЧДУ

По-горе ние предполагахме хомогенност на ЧДУ, което функцията, която искаме да апроксимираме чрез Радоновите ѝ проекции, удовлетворява. Естествено е да се разглеждат аналогични интерполационни задачи (чрез дадени стойности на Радонови проекции) и при нехомогенни уравнения, т.е. $\Delta u = f$, където f е дадена функция, дефинирана в разглежданата област. Такива ЧДУ могат да бъдат третирани по следния начин: първо се конструира частно решение u_f априорно или приближено; след което, поради линейността на оператора на Лаплас решение на задачата се търси във вида $u_0 + u_f$, където неизвестната функция u_0 вече е хармонична.

В статия [4] е разработен алгебричен метод за реконсртуиране на функции, удовлетворяващи уравнението на Поасон в единичния кръг с полиномиална дясна част от степен m. Данните (освен дясната част) се състоят от $2n+1$ стойности на Радонови проекции на неизвестната функция.

Като първа стъпка конструираме частно полиномиално решение u_f на $\Delta u_f = f$ в полиномиално пространство от степен $m+2$. Така свеждаме задачата до интерполационна задача (2) за хармонична функция, която решаваме в пространството от хармонични полиноми $\mathcal{H}_n$, използвайки предварително разработен от нас метод (статия [6]). Показваме, че ако $n \geq m+2$ интерполантът не зависи от избора на хомогенизиращия полином u_f.

За специалния случай, когато Радоновите проекции са взети по хорди, образуващи правилен изпъкнал многоъгълник, доказваме оценка на грешката, която зависи от гладкостта на неизвестната функция по границата. Оценката на грешката зависи и от избора на хомогенизиращия полином, но само с точност до умножение с константа, което не променя асимптотичното поведение относно n.

Трябва да отбележим, че в статиите на P. Van Manh[7] [8] [9] са използвани интензивно резултатите ни за интерполиране с хармонични полиноми по Радонови проекции. Хармоничениият аналог на формулата на Мар за пресмятане на Радоновите проекции на базисните хармонични полиноми и основната интерполационна теорема в статия [6] дават тласък на изследванията в областта.

[7] Asymptotic behavior of interpolation polynomials of harmonic functions based on Radon projections, Van Manh, P., Calcolo, 2017, Volume 54, Issue 3, 881–902.

[8] Harmonic interpolation of Hermite type based on Radon projections in two directions, Van Manh P., Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2017, Vol. 454(2), 481-501.

[9] On polynomial interpolation of bivariate harmonic polynomials, Van Manh, P., Comptes Rendus Mathematique, Ser.I 355, 2017, Elsevier, 28-33.

2. Апроксимации с нисък ранг

2.1. Апроксимации на матрици с матрици с по-нисък ранг.

Класическата задача за апроксимиране с нисък ранг е задачата за апроксимиране на дадена матрица колкото е възможно по-добре чрез матрица със същата размерност, но с по-нисък ранг. Отговорът на тази задача за апроксимиране с по-нисък ранг и за най-доброто приближение в спектрална норма се дава от теоремата на Екарт-Йанг[10]. Грешката на най-доброто приближение е тясно свързана със сингулярните стойности на разглежданата матрица.

Много малко е известно за апроксимирането на матрици с такива с по-нисък ранг за норми, различни от спектралната. Някои резултати, отнасящи се за клас от елементни норми са дадени неотдавна в статия от A. Pinkus[11]. За този клас норми Pinkus показва, че матрицата на най-добро приближение съвпада с оригиналната матрица в определен брой редове и стълбове.

В статия [1] извеждаме аналози на някои от резултатите на Pinkus за случая на апроксимиране в елементна максимум норма. В процеса на работа обобщаваме един основен резултат на Pinkus от 2012 г. и го доказваме, използвайки само добре известни фундаментални резултати от теория на апроксимациите, докато Pinkus използва интензивно теорията на n-widths в доказателството си. Основавайки се на този по-общ резултат, описваме грешката на най-добро приближение на матрица с матрица от ранг с единица по-малък и даваме характеризация на матрицата на най-добро приближение. Марицата на грешката има свойството еквиосцилация. За случая на интерполиране с матрици с произволен ранг, даваме оценки на най-доброто приближение отгоре и отдолу в термините на някои подматрици с „максимален обем".

Илюстрираме получените резултати за простия случай от матрици 2×2 и даваме просто представяне от затворен тип на грешката на най-доброто приближение.

2.2. Апроксимации с нисък ранг, използващи сплайни.

Апроксимациите на матрици и тензори с такива от по-нисък ранг е бързо развиваща се област, която се използва успешно в много задачи от числения анализ и приложения. Такива методи са интензивно изследвани в литературата.

Изучаваме апроксимиране с нисък ранг в пространства от тензорни произведения на сплайни. Такива пространства се използват интензивно в Изогеометричния анализ (IGA). IGA е метод за дискретизация на частни диференциални уравнения, разработен от Thomas J. R. Hughes през 2005 г.. Той се основава на идеята, че стандартното представяне на геометриите от индустриалните CAD системи, което е в

[10] C. Eckart, G. Young, The approximation of one matrix by another of lower rank, Psychometrika, 1936, 1(3), 211–218.

[11] A. Pinkus, On best rank n matrix approximations, Linear Algebra and its Applications, 2012, 437(9), 2179–2199.

термините на пространства от тензорни произведения на сплайни, трябва да се използва директно в анализа, а също така решенията трябва да бъдат представени в такива пространства. Този подход става все по-популярен през последното десетилетие.

В [2] разглеждаме един алгоритъм за апроксимиране на функции на две променливи чрез „сплайни с нисък ранг" – суми на тензорни произведения на едномерни сплайни. Нашият подход е мотивиран от така наречения Adaptive Cross Approximation (ACA) алгоритъм[12] за апроксимиране на матрици с такива от по-нисък ранг и от скорошното разширение в двумерния случай на пакета chebfun[13] за апроксимации с нисък ранг на функции на две променливи. Получените апроксиманти с нисък ранг принадлежат на пространството от тензорни произведения на сплайни, но по принцип изискват съхранението на много по-малко коефициенти, отколкото обикновено са необходими за съхранението на апроксимантите от цялото пространството от тензорни произведения на сплайни. Анализирали сме сложността на нашия алгоритъм и показваме, че той може да бъде ефективно реализиран, използвайки ACA алгоритъма за матрици с пълно „пивотиране" или „пивотиране по редове". Качеството на апроксимация е задоволително близко до най-добрата апроксимация с нисък ранг, която използва парциални суми на декомпозицията по сингулярни стойности. Нашият алгоритъм води до драстични икономии, в сравнение с апроксимацията в цялото пространство от тензорни произведения на сплайни. Показваме, че когато апроксимараме със „сплайни с нисък ранг" можем да постигнем грешка на апроксимация близка до $\mathcal{O}(n^{-(p+1)})$, където n е броя на степените на свобода, а p е степента на сплайните, докато при апроксимиране в цялото пространство от тензорни сплайни на d променливи, най-добрата грешка, на която можем да се надяваме е $\mathcal{O}(n^{-(p+1)/d})$.

Нещо повече, анализът на сложността показва, че алгоритъмът е линеен по отношение броя на степените на свобода по редове, когато използваме пивотиране по редове. Това ни дава възможност да решаваме много големи апроксимационни задачи, за които апроксимантите от пространството от тензорни произведения на сплайни вече не биха могли да бъдат запазени в паметта и/или би било прекалено скъпо да бъдат пресметнати, стига рангът да е относително малък.

Демонстрирали сме апроксимационните качества на нашия алгоритъм с няколко числени експеримента. В частност виждаме, че използването на пивотиране по редове, което е много по-бързо за задачи с голяма размерност, не увеличава съществено грешката на апроксимация.

Алгоритъмът има интересни приложения в бурно развиващата се област на изогеометричния анализ, както като схема за компресиране на данни, така и за разработване на бързи солвъри за частни диференциални уравнения.

[12] M. Bebendorf, Hierarchical Matrices, Lecture Notes in Computational Science and Engineering, Vol. 63, Springer Berlin Heidelberg 2008.

[13] A. Townsend, L. N. Trefethen, An extension of Chebfun to two dimensions, SIAM Journal on Scientific Computing, 2013, 35(6), 495–518.

3. Други

В статия [8] е предложен е теоретичен модел за изчисляване на профила на напрежението, получено при повърхностна кристализацията. Изследвана е зависимостта на промяната на профила на разпредение на напрежението от размера на зърната. Например, показваме, че за малки зърна профилът на напрежението има максимум в центъра на зърното, което може да доведе до образуване на пора в центъра за зърното. За големи зърна има два максимума на профила на напрежение и те са близо до стените на растящия от повърхността кристален фронт. Математическият модел е разработен и верифициран съвместно с колеги от Института по физикохимия - БАН.

Библиография

[1] I. Georgieva, C. Hofreither, On best uniform approximation by low-rank matrices, Linear Algebra and its Applications, 2017, Vol. 518, 159-176, https://doi.org/10.1016/j.laa.2016.12.034, IF 0.973.

[2] I. Georgieva, C. Hofreither, An algorithm for low-rank approximation of bivariate functions using splines, Journal of Computational and Applied Mathematics, 2017, Vol. 310, 80-91, https://doi.org/10.1016/j.cam.2016.03.023, IF 1.357.

[3] I. Georgieva, C. Hofreither, New results on regularity and errors of harmonic interpolation using Radon projections, Journal of Computational and Applied Mathematics, 2016, Vol. 293, 73-81, https://doi.org/10.1016/j.cam.2015.02.056, IF 1.357.

[4] I. Georgieva, C. Hofreither, Interpolating solutions of the Poisson equation in the disk based on Radon projections, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2015, Vol. 423(1), 305-317, https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2014.09.031, IF 1.064.

[5] I. Georgieva, C. Hofreither, Cubature rules for harmonic functions based on Radon projections, Calcolo, Springer Milan, 2015, Vol.52(2), 153-166, https://doi.org/10.1007/s10092-014-0111-2, IF 0.816.

[6] I. Georgieva, C. Hofreither, Interpolation of harmonic functions based on Radon projections, Numerische Mathematik, 2014, Vol.27(3), 423-445, http://dx.doi.org/10.1007/s00211-013-0592-y, IF 1.608.

[7] I. Georgieva, C. Hofreither, C. Koutschan, V. Pillwein, and T. Thanatipanonda, Harmonic interpolation based on Radon projections along the sides of regular polygons. Central European Journal of Mathematics, 2013, Vol. 11(4), 609-620, http://dx.doi.org/10.2478/s11533-012-0160-1, IF 0.519.

[8] A. Karamanov, I. Georgieva, R. Pascova, I. Avramov, Pore formation in glass-ceramics: Influence of the stress energy distribution, Journal of Non-Crystalline Solids, Elsevier, 2010, Vol. 356(2), 117-119, https://doi.org/10.1016/j.jnoncrysol.2009.10.004, IF 1.483.

[9] I. Georgieva, R. Uluchev, Smoothing of Radon projections type of data by bivariate polynomials, Journal of Computational and Applied Mathematics, 2008, Vol. 215, 167-181, https://doi.org/10.1016/j.cam.2007.04.002, IF 1.048.

[10] I. Georgieva, C. Hofreither, R. Uluchev, Least Squares Fitting of Harmonic Functions Based on Radon Projections, In: Floater M., Lyche T., Mazure M.L., Mørken K., Schumaker L.L. (eds) Mathematical Methods for Curves and Surfaces. MMCS 2012. Lecture Notes in Computer Science, Vol. 8177. Springer, Berlin, Heidelberg, `https://doi.org/10.1007/978-3-642-54382-1_9`, SJR 0.332.

[11] I. Georgieva, C. Hofreither, An algebraic method for reconstruction of harmonic functions via Radon projections, AIP-Conference Proceedings, 2012, Vol. 1487(1), 112-119, `http://dx.doi.org/10.1063/1.4758948`, SJR 0.16.

[12] I. Georgieva, R. Uluchev, Surface reconstruction and Lagrange basis polynomials, In: Large-Scale Scientific Computing. LSSC 2007, Lecture Notes in Computer Sciences, 2008, Springer-Verlag, Vol. 4818, 670-678,
`https://doi.org/10.1007/978-3-540-78827-0_77`, SJR 0.281.

[13] I. Georgieva, C. Hofreither, Cubature rules for harmonic functions on the disk using line integrals over two sets of equispaced chords, In "Constructive Theory of Functions, Sozopol 2013, Dedicated to B. Sendov and V. Popov 83-95, (K. Ivanov, G. Nikolov and R. Uluchev, Eds.), Prof. Marin Drinov Academic Publishing House, Sofia, 2014.

[14] I. Georgieva, C. Hofreither, and R. Uluchev, Interpolation of mixed type data by bivariate polynomials. In "Constructive Theory of Functions, Sozopol 2010: In memory of Borislav Bojanov (G. Nikolov and R. Uluchev, Eds.), 93-107. Prof. Marin Drinov Academic Publishing House, Sofia, 2012.

Ирина Георгиева

подпис:

дата: 18. 12. 2017.