

РЕЦЕНЗИЯ

*от доц. д-р Румен Костадинов Улучев
Висше транспортно училище „Тодор Каблешков“*

По дисертационен труд за присъждане на: образователна и научна степен „доктор“

Област на висшето образование: 4. Природни науки, математика и информатика

Професионално направление: 4.5. Математика

Научна специалност: Математически анализ

Автор на дисертационния труд: Иван Иванов Гаджев

Тема на дисертационния труд: „Характеризация на приближенията с оператори на Баскаков и на Майер-Кьониг и Целер“

Научен ръководител: Доц. д-р Владимир Христов

1. Общи данни за дисертанта.

Иван Гаджев завършва средно образование в ПГ „Св. Климент Охридски“, гр. Силистра, през 1980 г. След отлично представяне на Националната средношколска олимпиада по математика през 1980 г. е приет за студент във Факултета по математика и информатика на СУ „Св. Климент Охридски“ без конкурсен кандидатстуденски изпит.

От 1982 г. е студент във ФМИ на СУ „Св. Кл. Охридски“, където се дипломира като магистър по математика (специализация „Реален и функционален анализ“) през 1987 г.

През 1990 г. Ив. Гаджев е зачислен в задочна докторантура в Московския държавен университет „М. В. Ломоносов“, като за научен ръководител е определен проф. Борис Кашин. Впоследствие, през 1991 г. докторантурата е превърлена в Института по математика и информатика към БАН. За научен ръководител е определен доц. д-р Владимир Христов. През 1995 г. Иван Гаджев е отчислен от докторантурата с право на защита.

Професионалната кариера на Иван Гаджев преминава основно във ВТУ „Тодор Каблешков“ – София. През 1987 г. той е избран за асистент по „Математически анализ“ към катедрата по „Математика и информатика“, където работи в периода 1987–1999 г. и от 2011 г. досега. През 1999–2011 г. Ив. Гаджев се премества със семейството си в САЩ, където практически не се занимава с математика.

2. Обща характеристика на представения дисертационен труд.

Представеният от ас. Гаджев дисертационен труд „Характеризация на приближенията с оператори на Баскаков и на Майер-Кьониг и Целер“ е от 105 страници. Той се състои от увод, три глави и библиография с цитирани 54 източника.

Намирането на оценки за приближението на функции с линейни положителни оператори е класическа задача в теория на апроксимациите. Характеризацията на такива приближения предполага оценяването на грешката от приближенията с неравенства отгоре (прави неравенства) и отдолу (обратни неравенства) чрез подходящ модул на гладкост, К-функционал или друга величина. Значително по-трудно се оказва доказването на обратни неравенства.

През 1993 г. Дициан и Иванов въвеждат една условна класификация на силните обратни неравенства, т.е. за оценките на К-функционала чрез нормите на грешките от приближенията. Според тази класификация, най-силните неравенства са от тип А, като нататък по сила следват тези от тип В, С и D.

Дисертационният труд на Иван Гаджев е посветен на приближенията с линейни положителни оператори и по-специално, на получаването на силни обратни и прави неравенства за приближаване на функции от определени класове с оператори на Баскаков и на Майер-Кьониг и Целер. В съвкупност, правите и обратните неравенства водят до пълната характеристика на тези апроксимации, формулирана в термините на К-функционали.

Уводът на дисертацията е съществена част от изложението, като в него освен кратките исторически бележки и препратки за разглежданите задачи, основните означения и дефиниции, научните форуми на които са докладвани получените резултати и научните приноси на дисертанта, са формулирани строго всички доказани по-нататък теореми.

В глава първа са разгледани приближения на функции f от определен клас с оператора на Баскаков

$$V_n f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) V_{n,k}(x), \quad x \in [0, \infty),$$

където $V_{n,k}(x) = \binom{n+k-1}{k} x^k (1+x)^{-n-k}$.

Главният резултат тук е формулиран в Теорема 5 и утвърждава пълната еквивалентност на равномерната норма на грешката $\|f - V_n f\|$ и К-функционала $K_{\psi}(f, \frac{1}{n})$, $\psi(x) = x(1+x)$, където

$$K_{\phi}(f, t^2) = \inf_g \{ \|f - g\| + t^2 \|\phi D^2 g\| \}.$$

Най-съществената част е доказването на силно обратно неравенство от тип А. Досега не е известно публикувано доказателство на силното обратно неравенство от тип А за оператора на Баскаков, макар такъв резултат да е анонсиран от Тотик през 1994 г.

Даденото от Ив. Гаджев доказателство най-общо следва метод, предложен от Дициан и Иванов и използван от Кнооп и Жоу за оператора на Бернщайн.

Ключов момент, принципно различен от прилаганите досега техники, е оценяването с различни функции на грешката в интервали $[0, \frac{3 \ln \alpha}{2\alpha}]$ и $(\frac{3 \ln \alpha}{2\alpha}, \infty)$ (Лемми 1.3 и 1.4). Тук дисертантът е проявил голяма изобретателност и находчивост за да преодолее възникналите трудности. В хода на изследванията са доказани още два важни резултата, представляващи и самостоятелен интерес – неравенство от тип Вороновская за оператора на Баскаков V_n (Теорема 6) и неравенство от тип Бернщайн за итерирания оператор на Баскаков V_n^N (Теорема 7).

Всички доказателства са конструктивни и изключително тежки от техническа гледна точка, като при извеждането им дисертантът демонстрира завидни умения.

В глава втора са разгледани теглови приближения с оператора на Баскаков. По-подробно, за функции f от определен клас тук се изследва равномерната норма за интервала $[0, \infty)$ на грешката $\|w(f - V_n f)\|$, където теглото w е от вида $w(x) = x^{\gamma_0}(1+x)^{\gamma_\infty}$. Доказани са прави и силни обратни неравенства от тип А за възможно най-широк клас тегла (т. нар. естествени тегла) от горния вид, а именно при $\gamma_0 \in [-1, 0]$ и $\gamma_\infty \in (-\infty, \infty)$. Известните досега прави и силни обратни неравенства (най-много от тип В) се отнасят само за твърде тесен кръг тегла.

Централният резултат в тази глава е формулиран в Теорема 9 и установява еквивалентността на тегловата грешка $\|w(f - V_n f)\|$ с К-функционала $K_w^\psi(f, \frac{1}{n})$, $\psi(x) = x(1+x)$, където

$$K_w^\phi(f, t^2) = \inf_g \{ \|w(f - g)\| + t^2 \|w\phi D^2 g\| \}.$$

Внимание заслужават също така тегловите версии на неравенство от тип Вороновская за оператора на Баскаков и на неравенство от Бернщайнов тип за итерирания оператор на Баскаков, съответно Теорема 10 и Теорема 11.

В глава трета на дисертационния труд са изследвани теглови приближения с оператори на Майер-Кьониг и Целер. За функции f от определен клас операторът на Майер-Кьониг и Целер се дефинира с

$$M_n f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n+k}\right) M_{n,k}(x), \quad x \in [0, 1),$$

където $M_{n,k}(x) = \binom{n+k}{k} x^k (1-x)^{n+1}$.

Установени са естествените тегла от вида $w(x) = x^{\gamma_0}(1-x)^{\gamma_1}$ – при $\gamma_0 \in [-1, 0]$ и $\gamma_1 \in (-\infty, \infty)$ за разглежданите оператори и отново са доказани прави и силни обратни неравенства от тип А. Оттук, основният резултат в глава трета е формулиран в Теорема 12, а именно еквивалентността

$$\|w(f - M_n f)\| \sim K_w^\varphi(f; \frac{1}{n}),$$

където $\varphi(x) = x(1-x)^2$.

Доказателството се базира на смяната $z = \frac{x}{1-x}$, изпращаща оператора на Майер-Кьониг и Целер в оператора на Баскаков с точност до множител:

$$M_n(f, x) = \frac{1}{1+z} V_n(f, z).$$

Резултатите се получават елегантно и кратко, но стъпват на базата на вече доказаните такива за операторите на Баскаков.

3. Общо описание на публикациите по дисертацията.

Публикациите по дисертационния труд са четири на брой. Ще използваме номерацията в приложения от дисертанта списък.

Получените резултати в [2], [3] и [4] съставляват по същество дисертацията и са описани подробно в т. 2 по-горе. Изложението в дисертацията в общи линии следва представянето на резултатите и доказателствата им в публикациите, поради което няма да влизаме в детайли.

В [2] е доказан най-силният резултат на дисертанта, а именно силно обратно неравенство от тип А за оператора на Баскаков, водещо до пълната характеристика на грешката от приближението на функции с оператора на Баскаков чрез К-функционала. Като първа публикация на Иван Гаджев в научната му работа по теория на апроксимациите, статията изглежда внушително. Тази статия съставлява глава първа на дисертацията. Публикувана е в списание *Serdica Mathematical Journal*.

Аналогичен резултат – силно обратно неравенство от тип А за оператора на Майер-Кьониг и Целер – е доказан в [1]. До настоящия момент най-добрият резултат в тази връзка е силно обратно неравенство от тип В. Статията [1] е публикувана в реномираното списание *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, издание на Elsevier, с IF: 1,119 за 2013 г., 5-годишен IF: 1,233 и SJR: 1,418. Резултатите от тази публикация са обобщени по-късно в [4].

В [3] са разгледани теглови приближения с оператори на Баскаков при тегла на Якоби. Резултатите от тази статия са поместени заедно с пълните доказателства в глава втора на представения дисертационен труд. Публикацията [3] е отпечатана в международното списание *Journal of Mathematical Inequalities & Applications* с индекс JCR: 0,588 за 2012 г.

Теглови апроксимации за операторите на Майер-Кьониг и Целер са изследвани от дисертанта в [4]. Оттук като частен случай при теглова функция $w(x) = 1$ се получават тези от [1]. В [4] обаче съществено се използват получените в [3] резултати за теглови приближения с оператора на Баскаков. Резултатите от тази статия са изложени в глава трета на дисертацията. Статията [4] е публикувана в препринт на ИМИ-БАН.

Прави много добро впечатление, че и четирите публикации по дисертацията са самостоятелно дело на Иван Гаджев. В този смисъл, оригиналността на резултатите не подлежи на съмнение.

Не са известни цитирания от други автори на резултатите в [1]–[4], но това е обяснимо поради факта, че това са публикации излезли от печат през последната година.

Получените резултати са докладвани на две сбирки на Научния семинар на секция „Математическо моделиране и числен анализ“ в ИМИ-БАН през 2015 г., на международния семинар „Workshop on Approximation Theory, CAGD, Numerical Analysis and Symbolic Computation“ в Созопол 2014 г. и на Пролетната научна сесия на ФМИ към СУ „Св. Кл. Охридски“ 2015 г.

4. Критични бележки и препоръки.

Критичните ми бележки са насочени основно върху структурата на дисертацията. Естествено би било съдържанието да е преди увода, тъй като в уводната част са формулирани всички теореми и по този начин уводът се явява важна съставна част от изложението.

Считам, че добавянето на формулировките на теоремите на съответните места в изложението преди доказателствата им, би направило отделните глави по-независими от увода.

Желателно е получените резултати да бъдат резюмирани в отделна заключителна част на дисертацията. Тук това е направено в увода.

Забелязани са и някои дребни неточности. Например, на стр. 74, ред 5, отдолу-нагоре, накрая на реда е пропуснат диференциала du ; на стр. 78, ред 5–6, отгоре-надолу, при пренасянето на израза $\|wf\|$; в хедъра на четните страници е останало някакво работно заглавие „Приближаване с линейни положителни оператори“.

Длъжен съм да уточня, че направените забележки в никакъв случай не намаляват значимостта на представения труд, нито тежестта на научните резултати в него.

5. Оценка на автореферата.

Представеният автореферат следва изложението в дисертационния труд в достатъчно пълна степен. Той съдържа кратки исторически бележки и препратки за разглежданите задачи, необходимите основни означения и дефиниции, най-важните доказани резултати, научните приноси и друга информация, от която се получава пълна представа за дисертационния труд и научната работа върху него от дисертанта. Авторефератът е написан изключително ясно и прецизно.

6. Заключение.

Представеният от ас. Иван Гаджев труд „Характеризация на приближенията с оператори на Баскаков и на Майер-Кьониг и Целер“ има всички необходими качества на дисертация за придобиване на образователна и научна степен „доктор“. От него е видно, че дисертантът притежава задълбочени теоретични познания в областта на приближенията с линейни положителни оператори. Научните приноси на автора са безспорни. Решени са задачи, върху които са работили редица други изследователи през последните 20 години и в някои случаи са постигнали само частични резултати. В хода на извеждането на резултатите дисертантът е преодолял значителни трудности, като е демонстрирал отлична техника при получаването на необходимите оценки. Самостоятелните публикации в специализирани научни списания и издания са доказателство за способностите на Иван Гаджев за бъдещи самостоятелни научни изследвания.

В заключение, оценявам положително представения дисертационен труд и предлагам на Научното жури да присъди на Иван Иванов Гаджев образователната и научна степен „доктор“ по професионално направление 4.5. Математика

от област на висшето образование 4. Природни науки, математика и информатика.

03 юни 2015 г.
София

Рецензент:.....
/Доц. д-р Румен Улучев/