ОЦЕНКА НА АКАДЕМИЧНИТЕ ПОСТИЖЕНИЯ НА Д-Р ЙОРГ КОПИЦ

ЕРХАРД АЙХИНГЕР

1. Въведение

Познавам д-р Копиц като колега по математика поне от 20 години, защото сме се срещали на много конференции по алгебра. За мене е чест да бъда рецензент на процедура в БАН и удоволствие да дам оценка на академичните постижения на д-р Копиц.

2. Публикационна дейност

През 30-те години след защитата на дисертацията си в университета в Потсдам, Германия, д-р Копиц е автор или съавтор на около 90 публикации. Повече от 20 от тези статии са публикувани в списания с висока репутация: 9 статии в Semigroup Forum, 3 в International Journal of Algebra and Computation, 4 в Journal of Algebra and its Applications, 3 в Algebra Universalis, 2 в Communications in Algebra, 1 в Acta. Sci. Math. (Szeged).

3. Детайлна оценка на избраните за участие в конкурса публикации

В този раздел рецензентът коментира основните резултати, съдържащи се в 17 публикации, включени от автора за участие в конкурса. Те ще бъдат групирани в раздели според тяхното съдържание. Номерирането следва **Списъка на научните публикации**.

3.1. **Еквационална логика и многообразия.**

(17) Авторите изучават многообразия от алгебри, които имат свойството, че заместването на едни и същи изрази в s и t в тъждеството $s \approx t$ с еквивалентни изрази е правилният начин за извеждане на нови тъждества. Показано е, че съществуват точно 10 многообразия от полугрупи с тези свойства и че многообразията на идемпотентните и на комутативните групоиди също са стабилни.

(12) Теорията на *хипералгебрите* има за цел да обобщи резултатите за класическите алгебри за алгебри с недетерминистични операции. Авторите установяват, че има 17 полухипергрупи от ред 2 и те характеризират тези полугрупи от ред 3, които могат да бъдат конструирани от тези полухипергрупи. Описанието използва интересна сама по себе си концепция, описание на алгебри с помощта на *дизюнктивни тъждества*, т.е. формули от вида $\forall \boldsymbol{x} \bigvee_{i \in I} s_i(\boldsymbol{x}) \approx t_i(\boldsymbol{x})$.

(5) *Обобщената хиперсубституция* замества функционални символи и релационни символи във формула от първи ред съответно с изрази и релационни символи. За фиксиран език от първи ред тези хиперзамествания образуват моноид. Авторите описват идемпотентните и регулярните елементи в този моноид.

3.2. **Структурна теория на полугрупите.**

(16) За $Y \subseteq X$ с $|Y| = 2$, авторите определят максималната идемпотентна подполугрупа, максималната свръзка и максималната регулулярна подполугрупа на полугрупата от подмножества на Y^X с операцията $F * G = \{f \circ g \mid f \in F, g \in G\}$.

(13) За полугрупите, изследвани в [16], се определят релациите на Грийн.

(6) В допълнение към резултатите, получени в [13] са определени левите идеали, десните идеали и идеалите на полугрупите, изследвани в [16].

3.3. **Алгебри с няколко асоциативни операции: допелполугрупи, n-орни полугрупи, ...**

(11) Авторите изучават n-орни полугрупи, които имат n бинарни операции и удовлетворяват закона $x * (y \circ z) = (x * y) \circ z$ за всяка n^2 двойки $(*, \circ)$ от тези операции. Авторите дават явна конструкция на свободното произведение на произволно множество $(T_i)_{i \in I}$ от полугрупи и на свободната комутативна n-орна полугрупа над произволно множество X.

(10) Авторите дават конкретна конструкция на наредени допелполугрупи върху множество от бинарни релации и доказват аналогична на теоремата на Кейли теорема, че всяка наредена допелполугрупа може да бъде вложена в такава допелполугрупа и като следствие, че всяка допелполугрупа може да бъде вложена в допелполугрупа от трансформации.

(8) Допелполугрупата се нарича *правоъгълна*, когато двете ѝ полугрупови операции удовлетворяват тъждеството $xyz \approx xz$. Авторите дават явна конструкция на свободната правоъгълна допелполугрупа. Като следствие се доказва, че еквационалната теория на правоъгълните допелполугрупи е разрешима. Доказано е, че свободната правоъгълна допелполугрупа върху n елемента има $n + 4n^2$ елемента. Доказано е, че двете полугрупи на свободната правоъгълна допелполугрупа са изоморфни и е намерена най-малката конгруентност на свободната допелполугрупа, която определя правоъгълен фактор. Описани са всички поддопелниполугрупи и ендоморфизмите на свободната правоъгълна допелполугрупа.

3.4. **Полугрупи от запазващи наредбата функции.**

(15) Авторите описват релациите на Грийн и ранга на полугрупата от частичните инекции на крайно множество, които запазват наредбата "ограда" $1 < 2 > 3 < 4 > \cdots$.

(14) Дадено е пораждащо множество на полугрупата от частични преобразования върху $\mathbb{N}$, запазващи наредбата ограда.

(9) Авторите дават точна формула за броя на трансформациите, необходими за пораждане на пълната полугрупа от запазващи наредбата изображения на една n-елементна ограда.

(7) За един n-елементен път могат да се дефинират няколко моноида от трансформации, напр. от ендоморфизми, слаби ендоморфизми (= ендоморфизми на пътя с добавени примки) и автоморфизми. Определен е минималният брой на пораждащите на всеки от тези моноиди. Теорема 2.11 дава формула за броя на слабите ендоморфизми. (Между другото, тази формула дава точно последователността A081113 от онлайн енциклопедията от целочислени редици. Има ли комбинаторна причина за този факт?)

(4) Определени са мощността и рангът на моноида на *частичните* автоморфизми на n-елементен път и на моноида на инективните частични ендоморфизми на този път. За тези полугрупи са намерени и релациите на Грийн.

(3) Преобразованията, запазващи ориентацията, са полугрупа, съдържаща полугрупата на изображенията, запазващи наредбата. Авторите показват, че за една безкрайна плътно наредена верига е достатъчно да се добавят най-много 2 запазващи ориентацията преобразования към преобразованията, запазващи наредбата, за да се породи цялата полугрупа от запазващи ориентацията преобразования и описват случаите, когато е достатъчно да се добави само едно такова преобразование.

(2) За $Y \subseteq X \subseteq \{1, \ldots, n\}$ авторите определят колко трансформации трябва да бъдат добавени към полугрупата от запазващи наредбата изображения от X към Y, за да се породят всички изображения, запазващи ориентацията и намират минимални пораждащи множества. Също така е показано (за $m := |Y|$, $n := |X|$), че са необходими $S(n, m) - \binom{n}{m}$ елемента, за да породят всички трансформации, запазващи ориентацията.

(1) Авторите дават точна формула за броя на трансформациите, необходими за пораждането на полугрупата от частични автоморфизми на n-елементна ограда.

3.5. **Оценка на качеството на публикациите.** Всички представени статии съдържат нови математически резултати. Изследването и презентацията са направени "lege artis" (съгласно правилата на професията). Най-малко 5 от тези статии са публикувани в списания с висока репутация.

Трите статии по еквационална логика и многообразия разглеждат различни въпроси. Първата статия представя разширение на еквационалната логика, което позволява допълнителни изводи. Интуицията зад тези изводи не се обсъжда, но се показва, че в някои многообразия от полугрупи допълнителните правила за извод са правилни. Статията (12) за хипералгебрите описва класове от алгебри чрез дизюнктивни тъждества. Възможностите на подобни тъждества са интересен въпрос; но общността на статията (за полугрупи с 2 и 3 елементна и хиперполугрупи с 2 елемента) все още е малко ограничена. *Хиперсубституциите*, които са разгледани в третата статия (5), може да бъдат инструмент за изследване на условията на Малцев. В тази статия те се третират главно като източник на полугрупи, но не се обсъжда какви условия могат да гарантират идемпотентността или регулярността на хиперсубституциите.

Статиите по структурна теория на полугрупите определят структурата на определени полугрупи от функции в духа на общата теория на полугрупите. Един такъв клас полугрупи се изучава в трите статии (16), (13), (6), като

се отговаря по задоволителен начин на много на въпроси относно тяхната структура. Осем от представените статии изследват полугрупи от функции, запазващи наредбата. В допълнение към стандартните теоретични свойства на полугрупите (релации на Грийн) е извършена много работа за намирането на минимални пораждащи множества на тези полугрупи, техния ред и техния ранг. Това включва детайлно изследване на комбинаторната структура на тези изображения и дава няколко красиви формули за ранга и реда.
Заедно с А.В. Жучок и Ю.В. Жучок Копиц е изследвал алгебрите с няколко асоциативни операции и дава конкретни конструкции на свободните алгебри в няколко многообразия от този тип. Конструкциите на авторите са много по-конкретни от общите конструкции от универсалната алгебра и наистина често дават начин за решаване на еквационалната теория на такива многообразия. Това изследване изисква и предоставя съществена представа за типичните свойства на свободните структури и за универсалната алгебра като цяло и в частност за структурата на допелполугрупите и свързаните с тях структури.
Като цяло, количеството на резултатите от изследванията на Копиц е впечатляващо. Основна тема в неговите изследования е: Да вземем конкретна полугрупа от преобразования и да определим нейните структурни свойства (ранг, ред, релации на Грийн); 12 от 17-те статии следват тази програма. Това са много подходящи задачи за начинаещи изследователи и всъщност 13 от представените статии са в съавторство с учени с много по-малък опит и е резонно да се предположи, че Копиц е имал ролята на научен ръководител в тези изследвания. Качеството на резултатите от изследванията са добри, но отражението им не е изключително широко: все пак 17-те представени статии са цитирани няколко пъти в статии в изтъкнати списания като например, Journal of Algebra и Semigroup Forum.

4. Научна дейност

4.1. **Докторанти.** Д-р Копиц е бил научен ръководител на 7 успешно защитили докторанти, идващи от няколко различни страни.

4.2. **Доклади.** Изнесъл е много (> 50) доклади на международни конференции **4 доклада по покана**. Бил е поканен лектор в Благоевград (България), Бърно (Чехия), Лисабон (Португалия), Луганск (Украйна), Сегед (Унгария).

4.3. **Международно научно сътрудничество.** Научни посещения в Благоевград (България), Летбридж (Канада), Лисабон (Португалия). Член на редколегиите на 2 международни списания.

4.4. **Организационна дейност.** Съорганизатор и организатор на 8 конференции. Рецензентът участва в поне 2 от тях и е доволен от организирането на тези конференции от д-р Копиц.

5. Заключение

Д-р Копиц е много активен член на алгебричната колегия, който успешно допринася за много аспекти на научната работа. Той е ръководил няколко чуждестранни докторанти, поема редакторски задължения, организира конференции и поддържа добри контакти с много изследователи по целия свят. Той е автор на голямо количество сериозни изследвания, често в сътрудничество с много по-малко опитни или по-млади изследователи. Бях особено впечатлен от резултатите от алгебричен и комбинаторен характер за крайните трансформации, в който той характеризира пораждащите на определени запазващи наредбата функции и получава затворени формули за техните рангове, и от умелото изграждане на конкретни представяния на свободните обекти в неговите съвместни работи с А.В. и Ю.В.Жучок. Може да се очакв, чеа Копиц ще продължи да има непрекъснато научни публикации с добро качество и през следващите години.
Въз основа на тези съображения мога напълно да препоръчам д-р Копиц за професор в Българската академия на науките.

Линц, 20 март 2023 г. Доц. инж. д-р Ерхард Айхингер