

## РЕЦЕНЗИЯ

на

**на дисертационен труд, представен за получаване на образователната и научна степен „доктор“**

**Автор на дисертационния труд:** задочен докторант **Красимир Андреев Ангелов**

**Тема на дисертационния труд:** Числено изследване на двумерното уравнение на Бусинеск

**Заявител за откриване на процедурата:** секция „Математическо моделиране и числен анализ“, Институт по математика и информатика – БАН

**Докторска програма** – Математическо моделиране и приложение на математиката

**Рецензент:** проф. д-р Михаил Д. Тодоров, кат. Математическо моделиране и числени методи, ФПМИ, ТУ – София, зап. 93/01.03.2023 г. на Директора на Директора на ИМИ - БАН

### **Кратки биографични данни за дисертанта**

Красимир Ангелов е роден през 1986 г. През 2005 г. завършва английска гимназия в София. Същата година е приет за студент в Технически университет в Кайзерслаутерн, ФМИ, който завършва с квалификация бакалавър по „Приложна математика“ през 2010 г. Две години по-късно се дипломира като магистър по „Изчислителна математика и математическо моделиране“ във ФМИ, СУ „Св. Климент Охридски“. В периода 2013-2023 г. с прекъсване от 2 години е задочен докторант в ИМИ-БАН. Отчислен е с право на защита. По време на следването си и на докторантурата съвместява работа като асистент в ТУ-Кайзерслаутерн (2006-07 г.), програмист в различни фирми и компании в Германия и България (2008-2021), като Freelancer Project, Frahofer, Telecont и др., където усвоява и практикува C++, C#, Python, SQL, Matlab и пр.

Представената дисертация е написана на български език и има обем от 98 стр., формат В5+1/2, в.т.ч. въведение и 4 глави, 30 фигури, 18 таблици и библиография от 45 заглавия – всичките на английски език.

## **1. Актуалност на дисертационния труд**

Настоящият дисертационен труд е посветен на решаването на т.н. парадигматично уравнение на Бусинеск и по-специално установяването дали то допуска солитонни решения. Уравнението допуска само 3 закона за запазване – за масата, импулса и енергията, което предполага, че неговото решаване може да бъде реализирано изключително с числени методи. Усложняващ фактор е, че за разлика от други уравнения на Бусинеск, в този случай не са известни никакви аналитични решения. Наличието на 2 дисперсии, както и нелинеен член изискват адаптация и развитие на известните числени методи към адекватни и работещи числени алгоритми и техники. Подобен вид дейности изисква добро познаване на съответния математически инструментариум за аналитична, изчислителна и софтуерна реализация на съответните модели и постановки. Тематиката е с нетривиален фундамент, което е достатъчна обосновка и мотивация за провеждане на изследванията. Всичко това предполага нужната математическа квалификация, които видно от изложението дисертантът несъмнено притежава и умело прилага.

## **2. Анализ на състоянието на проблема**

Проблемът е и класически, и нов. Уравненията на Бусинеск имат дълга и противоречива история. Започвайки с първите емпирични наблюдения на Скот Ръсел през 1832 на вълни от нов тип до извеждането на първото уравнение в плитка вода през 1871 г. от Бусинеск. Солитонните вълни са нелинейни вълни, което води до поредица от модификации на оригиналното уравнение, изведено от Бусинеск, за решенията на които по-късно е доказано, че са некоректни в смисъл на Адамар. Без да навлизам в подробности за тези модификации, ще отбележа, че Парадигматичното уравнение на Бусинеск, изведено от Хр.Христов през 2002 г. е едно тяхно обобщение и надстройка в двумерния случай. Разбира се, тук веднага изниква въпросът дали то също е солитон поддържаща динамична система от дисперсионно-вълнов характер, дали е интегрируемо и колко закона за запазване има. За да отговорим на тези въпроси, трябва да се научим да го решаваме. И тук се изправяме пред предизвикателствата, свързани с решаване на двумерни диференциални уравнения, които освен линейния даламбертиан съдържат нелинейни членове. Накратко казано задълбоченото физическо и математическо познаване на проблема е предпоставка за избор на подходящи математически инструменти за неговото решаване и правилна интерпретация на получените резултати.

## **3. Методика на изследванията**

Методиката на изследванията е разнопосочна и тя касае изключително едномерното Парадигматично уравнение, за което има известно аналитично решение. Там се използват няколко метода: спектрален, метод на простата итерация, пертурбационно решение с равитие около малък параметър. За съжаление при двумерното ПУБ нещата се усложняват поради липсата на известно аналитично решение, което поставя въпросът още в самото начало как да бъде формулирана коректна задача на Коши. Това е предмет на самостоятелна задача, а именно (числено) решаване на стационарно (елиптично) уравнение на Бусинеск с цел извеждане на начално условие за хиперболичното

уравнение. Тук са възможни няколко подхода: неявна консервативна схема, използване на подвижна координатна система, построяване на диференчни схеми с висок ред на апроксимация и проследяване на влиянието им върху дискретните аналози на законите за запазване, построяване на асимптотично гранично условие за елиптичното уравнение. Всичко това налага гъвкав подход при численото решаване на съответните задачи. За мен не буди съмнение, че дисертантът е извършил всичко това на високо професионално равнище, като отчитаме и ролята на научния ръководител. Тук става дума, както за методиките и софтуера, така и за качеството и значимостта на получените резултати.

#### **4. Характеристика и оценка на получените резултати**

Дисертационният труд разглежда три взаимно свързани проблема, а именно:

- Числено решаване на елиптичната част на Парадигматичното уравнение на Бусинеск с цел получаване на решение, което да се използва за начално условие на пълното (хиперболично) ПУБ;
- Числено решаване на хиперболичното ПУБ с настройване на начално условие решението на елиптичното ПУБ;
- Числено изследване на динамиката на така конструираната начална задача и търсене на решения от солитонен тип.

Глава 1 има уводен характер. Приносен характер имат следващите 3 глави.

В Глава 2 са дефинирани основните математически инструменти и алгоритми, с помощта на които са решавани двумерните елиптичното и хиперболичното парадигматични уравнения на Бусинеск. Дискретизацията е върху равномерна мрежа, а дискретният лапласиан е с различни степени на апроксимация. Тъй като не е известно аналитично решение, редът на сходимост на различните крайни разлики и Тейлорови развития се проверява с известното правило на Рунге. Оценките са направени в  $L_2$  и  $L_\infty$  норми. Използван е Fast Poisson Solver за обръщане двумерния оператор на Лаплас.

В Глава 3 се разглежда стационарното ПУБ – постановка на задачата и нейното решаване. Прилага се методът на простата итерация, като предварително ПУБ се преобразува до система от 2 елиптични уравнения, които допълнително се параболизират с фиктивно време. Използвана е адаптивна стъпка по времето и явна диференчна апроксимация на системата. Проведени са изчисления и са сравнени резултатите в двете норми. Изведена е явна формула за граничното условие на елиптичното ПУБ.

Основните изследвания и резултати са описани в Глава 4, която е посветена на пълното (хиперболично) ПУБ. Изведена е формула за дискретния аналог на енергията и е показано, че масата и енергията се запазват на дискретно ниво. Изведено е също така условие за устойчивост на консервативното диференчно уравнение, но само за линейната му част. Показана е сходимостта върху 3 вложени мрежи по правилото на Рунге. Хиперболичната задача се решава по метода на Тейлор и метода на правите. Получава се система ОДУ с голям брой уравнения. Обръщането на оператора на Лаплас се извършва с Fast Poisson Solver. Редът на апроксимация по времето

зависи от броя членове в реда на Тейлор, което позволява редовете на апроксимация по времето и пространството да са равни. Числените решения, получени с Консервативната схема и методът на Телор са близки. Дискретната енергия се запазва и при двата метода, докато за дискретната маса са необходими по-големи области. Що се касае до формата и центърът на вълната, те се запазват в някакъв краен времеви интервал, като по-високият ред на апроксимация гарантира по-дълъг да е той. Очаквано при по-малки стъпки по времето и пространството и по-висока апроксимация резултатите са по-добри.

## **5. Преценка на авторската справка**

Авторската справка отразява приносите и акцентите в дисертацията като цяло. Приносите имат научен характер. Получените резултати могат да бъдат ценно помагало при по-нататъшни изследвания на тази нетривиална материя. Въпросите са повече от отговорите.

Оценявам приносите като колективни, оценявам ролята на научния ръководител, но водещата роля на дисертанта е несъмнена. Всички приноси могат да бъдат причислени към направлението „Обогатяване на съществуващи знания и придобиване на ново знание”. При решаване на подобни задачи връзката между теорията и необходимостта от нестандартен и новаторски подход и мислене е задължително условие за успех.

## **6. Критични бележки по трудовете и литературна осведоменост на дисертанта**

Дисертацията прави много добро впечатление. Изложението е стегнато и логически последователно. От него става нагледно ясно какви трудности е преодолял дисертанта при решаването на поставените проблеми. Нямам критични бележки за дисертацията по същество. Имали сме дискусии с дисертанта и забележките и препоръките, които съм му казал, са взети под внимание и отстранени. Налице е и задълбочено познаване на литературата по разглежданите в дисертацията въпроси, видно от въведението, което прави получените резултати още по-убедителни. Литературната осведоменост на дисертанта се основава на класически и най-нови източници.

## **7. Публикации по дисертацията**

Резултатите са докладвани на конференции и семинари у нас и в чужбина. Публикувани са в *Serdica Journal of Computing*, *AIP CP*, *International Journal of Applied Mathematics*. Две от статиите са в съавторство с научния ръководител и две – самостоятелни. *AIP CP* и *International Journal of Applied Mathematics* имат SJR, а второто принадлежи и на квантил Q3. Засега няма данни за цитати.

Други данни за публикациите могат да се видят в представената таблица.

**Таблица:** Справка за трудовете

Статии – 4 бр.	<i>Serdica Journal of Computing, AIP CP – 2numbers, International Journal of Applied Mathematics</i>
Доклади на международни научни прояви – 7 бр.	<i>Конференции и други форуми в България (семинар на секция Мат. моделиране и числен анализ, ИМИ-БАН, AMiTaNS, BIOMATH)</i>

## **8. Приложение на резултатите в практиката**

Получените в дисертацията резултати имат определено приносен характер в две направления: към числените методи и алгоритми за решаване на сложни изчислителни задачи; към теорията на нелинейните динамични системи и в частност към уравненията от тип Бусинеск. Тук е важно да отбележим, че говорим за резултати на моделно ниво, които към момента не могат да бъдат доказани или потвърдени в строгия смисъл на думата и които изискват по-нататъшни изследвания. Успешната реализация и надграждане предполагат решаването на нови интересни задачи и това ми е пожеланието към дисертанта и неговата ръководителка.

## **9. Преценка на автореферата**

Авторефератът отразява правилно и пълно съдържанието на дисертационния труд.

## **10. Лични впечатления**

Познавам дисертанта от времето, когато беше зачислен в тази докторантура макар и бегло. Слушал съм негови семинари, вкл. и предзащитата. Предвид сложността на материята, мисля, че се е преборил успешно с трудностите, за което го поздравявам и му желая по-нататъшни успехи.

## **Заклучение**

Отчитайки значимостта на проведените изследвания и след справка с ППЗРАСРБ в БАН и специфичните изисквания на ИМИ, мога да твърдя, че представената дисертация отговаря на препоръчителните наукометрични критерии за присъждане на научни степени. Въз основа на гореизложеното си позволявам да препоръчам на членовете на уважаемото НЖ да гласуват даване на ОНС „доктор” на **Красимир Андреев Ангелов**, Докторска програма „Математическо моделиране и приложение на математиката”.

## **СЪСТАВИЛ:**

Проф. д-р Михаил Тодоров  
кат. ”Матем. моделиране и числени методи”,  
ФПМИ при ТУ - София

26 май 2023 г.  
София