

# РЕЦЕНЗИЯ

от доц. д-р Иван Минчев,  
ФМИ на СУ „Св. Климент Охридски“

на дисертация за присъждане на образователна и научна степен „доктор“ в област на висше образование: 4. Природни науки, математика и информатика, професионално направление: 4.5. Математика, докторска програма: „Геометрия и Топология“.

**Автор на дисертационния труд:** Красимир Бориславов Кънчев

**Тема:** „Върху геометрията на минималните повърхнини в 4-мерно Евклидово пространство или пространство на Минковски“

**Научни консултанти:** доц. д-р Георги Ганчев и проф. д-р Огнян Касабов

Настоящата рецензия е съставена на основание на решение на Научното жури от 30.03.2018 г., определено със заповед № 88 от 28.03.2018 г. на Директора на Института по математика и информатика – БАН, издадена на основание на решение на НС на ИМИ (Протокол 3 от 23.03.2018 г.).

## **Общо описание на дисертацията и на приложените материали**

Представеният комплект материали (на хартиен носител и в електронен вид) е в съответствие с правилника за условията и реда за придобиване на научни степени и за заемане на академични длъжности в ИМИ на БАН и съдържа всички предвидени там трудове и документи.

Дисертационният труд съдържа 237 страници и е разделен на увод, пет глави и библиография, съдържаща общо 37 заглавия. Авторефератът се състои от 40 страници. Приложен е списък от пет статии на автора, свързани с темата на дисертацията. С това всички представени трудове по процедурата отговарят на изискванията по обем и форма.

## Преглед на основните резултати и приноси в дисертацията

Представеният дисертационен труд се занимава с изследване на локалните свойства на двумерни минимални повърхнини, вложени в плоски тримерни и четиримерни метрични пространства с положително-дефинитна или Лоренцова сигнатура. Това е една централна тема от класическата диференциалната геометрия с ред приложения за проблеми възникващи в областта на теоретичната физика.

Основен метод при изследванията в дисертацията е конструирането на специален вид изотермични координати – наречени канонични координати – върху един общ клас от вложени минимални повърхнини. Спрямо тези канонични координати коефициентите на първата и втората основна форма на повърхнината се изразяват чрез различните диференциалните инварианти на влагането и добиват конкретен геометричен смисъл. Условието за интегрируемост на тези коефициенти задават естествени частни диференциални уравнения, решенията на които съответстват на различните с точност до движение минимални повърхнини от общ вид, вложени в съответното пространство.

В Глава 1 на дисертацията се разглеждат общи математически конструкции, валидни за двумерни повърхнини вложени в пространствата  $\mathbb{R}^n$  и  $\mathbb{R}_1^n$  с произволна размерност  $n \geq 3$ . Ако  $x$  е локалната функция на влагането, задаваща локални координати  $(u, v)$  върху повърхнината, то с комплексната производна  $\Phi = 2\partial x/\partial t$ ,  $t = u + iv$  се задава една комплекснозначна векторна функция, за която се показва, че удовлетворява условието  $\Phi^2 = 0$  точно тогава, когато двойката  $(u, v)$  задава изотермични координати за повърхнината. Тази функция играе централна роля в по-нататъшните изследвания в дисертацията. В Теорема 1.3.1 се показва, че функцията  $\Phi$  е холоморфна, ако повърхнината е минимална. Върху минимални повърхнини, точките за които нормалната проекция на производната на  $\Phi$  се анулира,  $\Phi'^{\perp} = 0$ , са наречени изродени, а минималните повърхнини, които не притежават изродени точки, са наречени повърхнини от общ тип. Основният резултат в тази глава (Теорема 1.5.7) показва, че в околност на всяка точка на минимална повърхнина от общ тип могат да бъдат въведени канонични координати.

В Глава 2 се разглеждат минимални повърхнини в  $\mathbb{R}^3$ . Тази глава се явява подготвителна за теорията в  $\mathbb{R}^4$ . Тук са доказани вече известни свойства на минималните повърхнини в  $\mathbb{R}^3$  по нов начин, който лесно се обобщава за по-горната размерност четири.

Основните резултати в дисертацията се съдържат в Глава 3, където се разглеждат минимални повърхнини в четимерното Евклидово пространство  $\mathbb{R}^4$ . За всяка регулярна повърхнина  $M$  в  $\mathbb{R}^4$  имаме три основни диференциални инварианти: нормалния вектор на средна кривина  $H$ ; Гаусовата кривина  $K$ ; и кривината  $\kappa$  на нормалната свързаност на влагането. В дисертацията са получени явни формули, изразяващи  $K$  и  $\kappa$  чрез функцията  $\Phi$ . Показано е още, че в случая на минимална повърхнина, изродени са точно онези точки, за които елипсата на нормалната кривина е окръжност; точките с това свойство се наричат суперконформни. Показано е неравенството  $-K \leq |\kappa|$ , като е показано още, че равенство се достига точно в суперконформните точки на повърхнината. Използвайки функцията  $\Phi$  са изведени по нов начин формули от типа на Френе и система от естествени уравнения на минималните повърхнини в  $\mathbb{R}^4$ .

В Секция 3.4 са изведени чисто аналитично някои класически формули от тип „представяне на Вайерщрас“, задаващи минималните повърхнини в  $\mathbb{R}^4$  чрез тройка холоморфни функции. Използвайки теорията на спинорите в размерност четири са получени също така формули за трансформация на тройката холоморфни функции, съответстващи на движение на повърхнината в обхващащото пространство. Като приложение на каноничните представяния на Вайерщрас са изследвани минималните повърхнини, притежаващи изотермична параметризация чрез полиноми от възможно най-ниска степен. Показано е, че полиномите от втора степен определят минимални повърхнини, състоящи се само от изродени точки. Получено е подробно описание на минималните повърхнини, допускащи изотермична параметризация чрез полиноми от трета степен. В Секция 3.8, като следствие от каноничните представяния на Вайерщрас за минималните повърхнини в  $\mathbb{R}^3$  и  $\mathbb{R}^4$ , е получено съответствие между решенията на системата естествени уравнения на минималните повърхнини в  $\mathbb{R}^4$  и двойките решения на естественото уравнение на минималните повърхнини в  $\mathbb{R}^3$ . Като следствие е получено локално съответствие между несуперконформните повърхнини в  $\mathbb{R}^4$  и двойките минимални повърхнини в  $\mathbb{R}^3$ .

В Глава 4 се разглеждат минимални пространствено-подобни повърхнини в  $\mathbb{R}_1^3$  по метод, аналогичен на този от  $\mathbb{R}^3$ . Получени са вече добре известни свойства на тези повърхнини по нов начин, допускаш лесна адаптация и за по-горната размерност.

В Глава 5 се разглеждат минимални пространствено-подобни повърхнини в  $\mathbb{R}_1^4$ . Използваните методи тук и получените резултати са аналогични на тези от Глава 3 за случая на Евклидовото пространство  $\mathbb{R}^4$ .

## Публикации

Резултатите от дисертацията са публикувани в пет статии, всичките в съавторство с научния консултант на докторанта доц. д-р Г. Ганчев. Две от статиите са публикувани в „Доклади на Бан” през 2014 г. и 2016 г., една статия е публикувана в *Serdica Mathematical Journal* през 2016 г., а останалите две статии са засега само препринти в архива.

Приемам, че приносът на съавторите в съвместните статии е равностоен.

Получените резултати са докладвани на 3 международни конференции.

## Критични бележки и препоръки

За мен една много съществена част от дисертацията е полученото канонично представяне от тип на Вайерщрас за минималните повърхнините в  $\mathbb{R}^4$  чрез тройка от холоморфни функции. Цялата конструкция се свежда до построяването на експлицитна параметризация за точките от  $\mathbb{C}^4$ , лежащи върху квадриката  $z^2 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 = 0$ . Добре известно е, че параметризацията на тази квадрика е тясно свързана с теорията на спинорите в  $\mathbb{R}^4$ . В дисертацията връзката със спинорната теория е използвана само на едно място с цел получаване на трансформационни формули за тройката холоморфни функции при движение в  $\mathbb{R}^4$ . Всички останали разглеждания са направени изцяло в локални координати, без да се търси глобална интерпретация на възникващите уравнения и геометрични обекти и без да се прави опит за намиране на допълнителна връзка със спинорната теория. Според мен в тази посока има потенциал за още много изследвания. Още повече, че ако бъде намерена подобна геометрична интерпретация, това би било от съществена полза при изследване на минимални повърхнини, вложени не само в плоско Евклидово пространство, но и в по общи Риманови многообразия с нетривиална кривина.

## **Автореферат**

Съдържанието на автореферата правилно и изчерпателно отразява основните резултати и научни приноси на дисертацията.

## **Заклучение**

Представеният дисертационен труд на Красимир Кънчев съдържа оригинални и съществени резултати, отразяващи задълбочените и целенасочени научни изследвания, проведени от кандидата. Цялостната ми оценка за дисертацията, автореферата, научните публикации и научните приноси на кандидата по темата на дисертацията е силно положителна.

Считам, че дисертацията отговаря напълно на изискванията на ЗРАСРБ, неговия Правилник и Правилниците за условията и реда за придобиване на научни степени и за заемане на академични длъжности в ИМИ на БАН. На това основание препоръчвам на членовете на уважаемото Научно жури да гласуват за присъждането на образователната и научна степен „доктор“ на Красимир Бориславов Кънчев.

Дата: 14.05.2018 г.

Рецензент:

(доц. д-р И. Минчев)