

## **РЕЦЕНЗИЯ**

**от проф. д.м.н. Манчо Христов Манев**  
**от Факултета по математика и информатика**  
**на Пловдивския университет „Паисий Хилендарски“**  
относно дисертационен труд за придобиване  
на образователна и научна степен „Доктор“  
**в Института по математика и информатика на БАН**

по област на висше образование: 4. Природни науки, математика и информатика  
професионално направление: 4.5. Математика

докторска програма: „Геометрия и топология“

Автор: КРАСИМИР БОРИСЛАВОВ КЪНЧЕВ

Тема: „Върху геометрията на минималните повърхнини в 4-мерно евклидово  
пространство или пространство на Минковски“

Научни консултанти: доц. д-р Георги Ганчев, ИМИ-БАН,

проф. д-р Огнян Касабов, ВТУ „Т. Каблешков“

Със Заповед №88 от 20.03.2018 г. на Директора на Института по математика и информатика при БАН, издадена на основание решение на НС на ИМИ (Протокол №3/ 23.03.2018 г.), съм избран за член на научното жури в процедурата за защита на споменатия дисертационен труд. Съгласно решение на това жури (Протокол №1/30.03.2018) съм определен да напиша рецензия по дисертацията. В ролята си на член на научното жури съм получил електронно всички документи, подадени за участие в процедурата.

### **1. Обща характеристика на дисертационния труд и материалите по процедурата**

Комплектът материали по процедурата за защита на ОНС „Доктор“ от Красимир Кънчев е в съответствие с Правилниците за прилагане на ЗРАСРБ на БАН и ИМИ. Нямам забележки по документите.

Представеният дисертационен труд на Красимир Кънчев е с обем 237 страници. Състои се от увод, пет глави, заключение и цитирана литература от 37 заглавия. Тематиката и съдържанието на дисертационния труд съответстват напълно на докторската програма и научната специалност.

Авторефератът по дисертационния труд отговаря на изискванията и има обем от 40 страници. Резюмира правдиво съдържанието на дисертацията и нейните научни приноси.

## 2. Актуалност на изследването. Характеристика и оценка на дисертационния труд и приносите

Предмет на дисертацията са изследвания върху локални геометрични свойства на минималните повърхнини в тримерни и четиримерни евклидови пространства, както и на минималните пространствено-подобни повърхнини в тримерни и четиримерни пространства на Минковски.

Дисертантът прилага подходящ метод за изучаване на изследваните обекти и свързаните с тях величини в класическата диференциална геометрия и прави естествено продължение за пространство на Минковски, както и по отношение на размерността от 3 към 4. Тези геометрични повърхнини се радват на неотслабващ интерес и от колегите физици, както и на приложение в различни области: архитектура, материалознание, самолетостроене, корабостроене, биология.

Разработката на дисертанта се изгражда на базата на няколко публикации на наши водещи геометри начело с Г. Ганчев, започващи от 2008 г. с резултати върху канонични представяния на Вайерщрас за минимални повърхнини в тримерно евклидово пространство  $\mathbb{R}^3$  и пространство на Минковски  $\mathbb{R}_1^3$ . Тук включвам статии на Г. Ганчев и В. Михова за повърхнини на Вайнгартен в същите пространства, както и статии на Г. Ганчев и В. Милушева за изображение от тип на Вайнгартен за повърхнини в  $\mathbb{R}^4$  и  $\mathbb{R}_1^4$  – съответните пространства с размерност 4, както и работата на О. Касабов за канонични параметри върху минимални повърхнини. В дисертационния труд са проучени и са използвани редица публикации, касаещи темата, от чуждестранни автори.

Основна роля в прилагания подход играе използването на специални геометрични координати, наречени канонични координати. Каноничните координати върху Вайнгартенови повърхнини в  $\mathbb{R}^3$  и  $\mathbb{R}_1^3$  са въведени от Г. Ганчев–В. Михова, каноничните координати върху минимални повърхнини в  $\mathbb{R}^4$  са въведени от Т. Itoh, а каноничните координати върху пространствено подобните минимални повърхнини в  $\mathbb{R}_1^4$  – от L. Alías–B. Palmer.

Като основен аналитичен инструмент при изучаване локалните свойства на минималните повърхнини в изследваните пространства се използва една векторна холоморфна функция  $\Phi(t)$  на изотермични координати  $t = u + iv$ ,  $(u, v) \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$  за минималната повърхнина  $\mathcal{M} = (\mathcal{D}, x(t))$ .

Прави впечатление големият обем на дисертационния труд – 237 стандартни страници, както и добрият стил на изложение. Може да се каже, че подробното, ясно и аргументирано описание на проведените изследвания придават на дисертацията качествата на учебник по изучаваната тема.

Глава 1, която е озаглавена „Минимални повърхнини в  $\mathbb{R}^n$  и  $\mathbb{R}_1^n$ “, е въвеждаща за дисертацията и дава основните означения, дефиниции и свойства съответ-

но на минималните повърхнини в евклидово пространство и минималните пространствено-подобни повърхнини в пространство на Минковски, като и двете пространства са от произволна размерност. Въвежда се разглежданата от D. Hoffman и R. Osserman комплекснозначна векторна функция  $\Phi(t)$  като обобщено гаусово изображение на повърхнината и са получени основни свойства на тази функция. Чрез Теорема 1.3.1 и Теорема 1.3.2 е дадено характеризиране на разглежданите минимални повърхнини чрез  $\Phi$  и нейната примитивна. Изразява се гаусовата кривина  $K$  чрез  $\Phi$  и се характеризира множеството от нулите на  $K$ . Въвеждат се чрез  $\Phi$  канонични координати от първи и втори вид върху минимална повърхнина в разглежданите пространства от произволна размерност, които са аналог съответно на главните и на асимптотичните канонични координати в  $\mathbb{R}^3$ . Теорема 1.5.7 е теорема за съществуване на каноничните координати от двата вида, а според Теорема 1.5.8 каноничните координати от един и същи вид са единствени с точност до подредба и посока на координатните линии. В Теорема 1.5.9 е доказано, че каноничните координати от двата вида се получават едни от други чрез ротация на ъгъл  $\pi/4$  в допирателната равнина на  $M$ . Накрая на главата се разглежда въпросът как се преобразуват каноничните координати при основните геометрични трансформации на минимална повърхнина.

Глава 2 е посветена на минималните повърхнини в  $\mathbb{R}^3$  и служи за основа на изучаването на минималните повърхнини в по-общите случаи по-нататък в дисертацията. Известни свойства на изучаваните повърхнини се формулират и доказват така, че да могат да се обобщят в четиримерното евклидово пространство. Специализират се някои понятия и резултати от предходната глава за размерност 3. При изразяването на формулите и свойствата на минималните повърхнини в  $\mathbb{R}^3$ , вместо ортогоналната проекция на  $\Phi'$  върху комплексифицираното нормално пространство на  $M$  се използва съответната ѝ тук скаларна комплекснозначна функция  $\varphi$ . Разглеждат се характеристики на изучаваните повърхнини с изродени точки, изразени чрез  $\varphi$ . В случая, когато минималната повърхнина  $M$  е от общ тип, т.е. няма особени точки, е доказано, че съществуват канонични координати от първи (съотв. втори) вид, за които  $\varphi = 1$  (съотв.  $\varphi = -i$ ), и тези координати са главни (съотв. асимптотични). Намерени са връзките между каноничните координати от еднакъв и различен вид, тяхната трансформация при движение и хомотетия на  $M$  в  $\mathbb{R}^3$ , както и за еднопараметрична фамилия от асоциирани минимални повърхнини на  $M$ . След това въведените понятия и формули са илюстрирани чрез класически примери на минимални повърхнини в  $\mathbb{R}^3$  – повърхнина на Енепер, катеноид и хеликоид. По-нататък, чрез използване на функцията  $\Phi$ , са изведени по нов начин формули от тип на Френе и съответните условия за интегрируемост на системата ЧДУ относно нормалната кривина, които се свеждат до т.нар. естествено уравнение на минималните повърхнини в  $\mathbb{R}^3$ . Съществен резултат тук

е Теорема 2.3.2, която е от тип теорема на Боне. После се определя как се трансформира нормалната кривина като функция на главните канонични координати и при основните геометрични трансформации на минимална повърхнина  $M$  в  $\mathbb{R}^3$ . След това са получени представяния на функцията  $\Phi$  чрез двойка холоморфни функции от тип на Вайерщрас с помощта на тригонометрични, хиперболични и полиномни функции за дефиниране на минимални повърхнини относно произволни изотермични координати. Намерени са формулите за преобразуването на тези функции при смяна на координатите и при основните геометрични преобразувания на повърхнината, използвайки по-абстрактен подход от този на директните пресмятания, а именно чрез теорията на спинорите в  $\mathbb{R}^3$ . Изследванията продължават с изразяване на основните инварианти на минимална повърхнина в  $\mathbb{R}^3$  чрез комплексните функции от представянето на Вайерщрас. След това тези представяния се специализират относно канонични координати, като резултатите от статията на Г. Ганчев са получени по нов начин, който е необходим за обобщенията в следващите глави. Така е получено т.нар. канонично представяне на Вайерщрас за минимална повърхнина от общ тип в  $\mathbb{R}^3$ . В последната част на главата са изразени основните инварианти на минимална повърхнина от общ тип в  $\mathbb{R}^3$  чрез комплексните функции от двата вида канонично представяне на Вайерщрас. Ползвайки описания подход, получените изрази за нормалната кривина се интерпретират като локални формули за общото решение на естественото уравнение на минимална повърхнина в  $\mathbb{R}^3$ . В резултат на доказаните теореми в тази глава се прави извода, че има (поне локално) естествени съответствия (биекции) между три множества на класове от обекти: класовете минимални повърхнини от общ тип в  $\mathbb{R}^3$ , класовете решения на естественото уравнение на минималните повърхнини и класовете холоморфни функции на една променлива, които формират триъгълна комутативна диаграма.

В Глава 3 се изучават минималните повърхнини в четиримерното евклидово пространство  $\mathbb{R}^4$ . Тази глава е основна за дисертационния труд и представлява обобщение по пространствената размерност на изследванията в предходната, поради което структурата на двете глави е аналогична. Дефинира се минимална повърхнина  $M$  в  $\mathbb{R}^4$  относно изотермични координати, като  $p_1$  и  $p_2$  са съответната двойка нормални векторни полета. Геометрията на една минимална повърхнина се определя от две инварианти: гаусовата кривина  $K$  и кривината на нормалната свързаност  $\mathfrak{K}$ . И в тази глава изучаваните величини и свойства се описват в термините на функцията  $\Phi$ . Специфично за минимална повърхнина в  $\mathbb{R}^4$  е наличието на елипса на нормалната кривина, лежаща в нормалното ѝ пространство за дадена точка. По-нататък се обръща основно внимание на минималните повърхнини от общ тип или несуперконформните минимални повърхнини, т.е. без изродени точки или за които елипсата на нормалната кривина не е окръжност. Получено е неравенство между  $K$  и  $\mathfrak{K}$  за минимална повърхнина и характеризирането на су-

перконформните точки на  $M$  чрез тази двойка нейни кривини. Следвайки описания по-рано подход чрез  $\Phi$  се извеждат формули от тип на Френе относно комплексния базис  $\Phi, \bar{\Phi}, n_1, n_2$ , което е алтернативен начин на използвания в препринт на Ганчев и Милушева от 2008 г. Полученото условие за интегрируемост на тази система ЧДУ е система от две естествени уравнения на минимална повърхнина в  $\mathbb{R}^4$  относно двете скаларни инварианти  $\nu$  и  $\mu$ , имащи ролята на главни нормални кривини. Тази двойка величини е взаимно свързана с двойката кривини  $K$  и  $\kappa$ , относно които са известни естествените уравнения на минимална повърхнина в работата на R. de Azevedo Tribuzy и I. Guadalupe. Доказана е теорема от тип на Боне за изучаваните повърхнини, т.е. коя да е от тези двойки функции е решение на системата естествени уравнения на минималните повърхнини, така че съществува поне локално несуперконформна минимална повърхнина относно канонични координати от първи вид с точност до определено собствено движение на повърхнината, имаща дадените функции за кривини от съответния вид. След това са направени някои представяния от тип на Вайерщрас на минимални повърхнини в  $\mathbb{R}^4$ , зададени относно произволни изотермични координати, като  $\Phi$  се изразява чрез тройка холоморфни функции. Изучаването продължава с аналогични изследвания на тези от предишната глава чрез тази тройка функции. Едни от основните резултати в дисертацията са каноничните представяния на Вайерщрас за несуперконформните минимални повърхнини в  $\mathbb{R}^4$ . Свойствата на тези представяния са доказани в Теореме 3.6.4 и 3.6.5. Като приложение на това представяне е дадена пълна класификация на изучаваните повърхнини в  $\mathbb{R}^4$ , допускащи изотермична параметризация с полиноми от трета степен. След това са изразени основните инварианти на несуперконформна минимална повърхнина в  $\mathbb{R}^4$  чрез функциите, участващи в каноничните представяния на Вайерщрас. Получените формули за  $K$  и  $\kappa$  се интерпретират като експлицитни локални формули за общото решение на системата естествени уравнения на минималните повърхнини в  $\mathbb{R}^4$ . Аналогично на предходната глава и тук са получени (поне локално) естествени съответствия (биекции) между три множества на класове от обекти: класовете несуперконформни минимални повърхнини в  $\mathbb{R}^4$ , класовете решения на системата естествени уравнения на минималните повърхнини и класовете от двойки холоморфни функции на една променлива, които формират триъгълна комутативна диаграма. В последната част на главата, като следствие от каноничните представяния на Вайерщрас за минималните повърхнини в  $\mathbb{R}^3$  и  $\mathbb{R}^4$ , е получено (поне локално) съответствие между несуперконформните минимални повърхнини в  $\mathbb{R}^4$  и двойките минимални повърхнини от общ тип в  $\mathbb{R}^3$ . В резултат на тези съответствия е получена класификация на несуперконформните минимални повърхнини в  $\mathbb{R}^4$ , за които едното семейство канонични линии са и геодезични.

В Глава 4 се изучават минимални пространствено-подобни повърхнини в тримерно пространство на Минковски  $\mathbb{R}_1^3$  по метод, аналогичен на изложения в

Глава 2 за минималните повърхнини в  $\mathbb{R}^3$ . Така се достига по нов начин до известни свойства на тези повърхнини. Този подход позволява да се получат съответни резултати за минимални пространствено-подобни повърхнини в четиримерно пространство на Минковски  $\mathbb{R}_1^4$ , които са обект на Глава 5.

В последните две глави, касаещи пространство на Минковски, дисертантът е преодолел редица трудности от технически характер, произтичащи от смяната на вида пространство, но разработеният подход за изучаване на минимални повърхнини в евклидови пространства, изложен преди това в дисертацията, дава удобен инструментариум и благоприятна среда за провеждане на изследванията.

### **3. Преценка на публикациите и личния принос на докторанта**

Съгласно Специфичните изисквания на ИМИ-БАН за придобиване на образователната и научна степен „Доктор“ в професионално направление 4.5 Математика, кандидатът трябва да има поне 3 публикации в рецензирани издания, едно от които да е списание. Докторантът Красимир Кънчев има 5 статии с резултати от дисертационния си труд, като две от тях са публикувани в *Comptes rendus de l'Academie bulgare des Sciences* – IF(2014):0.284, една е излязла в *Serdica Mathematical Journal*, а другите две статии са качени на препринт сайта arXiv.org. Съавтор на всички публикации на дисертанта е неговият научен консултант Георги Ганчев, а авторският колектив на статията в *Serdica Mathematical Journal* включва и другия научен консултант Огнян Касабов. Поради това е ясно, че дисертантът удовлетворява задължителните критерии от гл. 4, чл. 6, т. 3 на Правилника на ИМИ-БАН за прилагане на ЗРАСРБ.

Приемам, че личният принос на Красимир Кънчев в получаването на резултатите и оформянето на статиите е съществен.

Получените резултати са докладвани от докторанта на 5 научни форума, като 3 от тях са международни конференции, където съм придобил много добри впечатления от владенето на тематиката от страна на дисертанта.

Резултатите от дисертационния труд имат вече своето първо цитиране, като първата публикувана статия на дисертанта е била цитирана в публикация на Петър Попиванов в *Comptes rendus de l'Academie bulgare des Sciences* – IF(2015): 0.233.

### **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

Дисертационният труд е върху интересна и съдържателна тема в диференциална геометрия. Получени са значителни оригинални научни резултати, обогатяващи и систематизиращи геометрията на минималните повърхнини в тримерни и четиримерни евклидови пространства и съответно на минималните пространствено-подобни повърхнини в пространства на Минковски от размерности 3

и 4. Дисертантът е показал задълбочени теоретични знания и професионални умения по научната специалност „Геометрия и топология“. Представените материали и документи по процедурата отговарят напълно на изискванията на Закона за развитие на академичния състав в Република България, Правилника за прилагане на този закон, Правилника за развитие на академичния състав на ИМИ на БАН за придобиване на ОНС „Доктор“.

Въз основа на гореизложеното убедено давам своята **положителна оценка** за качествата на дисертационния труд, автореферата, постигнатите резултати и научни приноси, поради което предлагам на уважаемото научно жури да присъди на Красимир Бориславов Кънчев образователната и научна степен „Доктор“ в област на висше образование 4. Природни науки, математика и информатика, професионално направление 4.5. Математика, докторска програма „Геометрия и топология“.

9.5.2018 г.

Рецензент:

гр. Пловдив

(проф. д.м.н. Манчо Манев)