

Становище

от проф. д-р Огнян Касабов
от ВТУ "Тодор Каблешков"

за дисертацията на Красимир Бориславов Кънчев

"Върху геометрията на минималните повърхнини в 4-мерно
Евклидово пространство или пространство на Минковски"

за присъждане на образователната и научна степен "доктор"
Област на висшето образование 4. Природни науки, математика и информатика
Професионално направление 4.5. Математика

1. Анализ на научните и научно-приложните постижения.

Дисертацията е посветена на някои важни въпроси от теорията на минималните повърхнини в Евклидовите и псевдо-Евклидовите пространства: съществуване и единственост на канонични координати, намиране представяне от тип „на Вайерщрас“ за минимални повърхнини, връзка между минималните повърхнини в четиримерно Евклидово пространство с тези в тримерно Евклидово пространство, намиране общото решение на някои частни диференциални уравнения, имащи ясен геометричен смисъл.

Минималните повърхнини са изключително интересни геометрични обекти. Тяхното изучаване в тримерното Евклидово пространство започва с някои трудове на Ойлер, Лагранж и Мьоние, но в началото единствените известни нетривиални минимални повърхнини са били катеноидите и хеликоидите. Много години по-късно Вайерщрас и Енепер дават общи формули, по които могат да се опишат (поне локално) всички минимални повърхнини.

Постепенно геометрите почват да се интересуват и от минимални повърхнини в пространства с по-висока размерност и то не само в Евклидови пространства, а също в пространства с индефинитна метрика, както и в произволни многообразия. В последните години беше установено, че някои повърхнини могат да се характеризират с техни инварианти - подобно на случая на характеризирането например на равнинните линии с тяхната кривина. При повърхнините това минава преди всичко през въвеждането на канонични координати - аналог на естествения параметър на кривите. Именно каноничните параметри са основната тема, която изследва дисертантът, макар покрай нея да са засегнати и други интересни, но свързани въпроси, например този за изродените точки на една повърхнина.

Дисертацията е разделена на пет глави.

В Глава 1 се дават основни дефиниции, които ще са необходими в изложението. Въвежда се комплексна векторна функция Φ , след което с тази функция се характеризират минималните повърхнини в произволно псевдо-Евклидово пространство

\mathbb{R}_k^n ($k = 0$ или $k = 1$). В последния параграф на Глава 1 са въведени канонични координати (обобщение на каноничните координати за повърхнини в \mathbb{R}^3 и \mathbb{R}^4) от два вида - главни и асимптотични. Доказано е съществуването на канонични координати в околност на всяка неизродена точка на повърхнината. Показано е, че каноничните координати от един и същ вид са определени еднозначно с точност до знак, номерация и адитивна константа. Намерена е връзката между каноничните координати от двата вида. Получените дотук резултати се прилагат в следващите глави.

Повечето твърдения в Глава 2 \mathbb{R}^3 са известни, но са доказани по нов начин, за да се демонстрира в класическа обстановка апаратът, разработен в Глава 1. Изследвана е връзката между нормалната кривина (в канонични координати) на минимална повърхнина в \mathbb{R}^3 , множеството на холоморфните функции и решенията на частното диференциално уравнение

$$\Delta \ln \nu + 2\nu = 0 .$$

Доказано е че съществуват биекции между класове от тези три типа съвсем различни помежду си обекти.

Глава 3 е посветена на минималните повърхнини в \mathbb{R}^4 . Поради големия брой резултати, ще спомена само най-важните от тях. Получено е канонично представяне от тип на Вайерщрас на разглежданите повърхнини. Получено е общото решение на системата ЧДУ

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{K^2 - \varkappa^2} \Delta \ln \sqrt[4]{K^2 - \varkappa^2} &= 2K \\ \sqrt[4]{K^2 - \varkappa^2} \Delta \ln \sqrt{\frac{K+\varkappa}{K-\varkappa}} &= 2\varkappa \end{aligned} ,$$

която поради геометричния си смисъл е наречена „система естествени уравнения“ на минималните повърхнини в \mathbb{R}^4 . Доказано е, че съществуват биекции между класове на еквивалентност от: минимални повърхнини в \mathbb{R}^4 , двойки холоморфни функции и решения на горната система ЧДУ. Като следствие е получено съответствие между минималните повърхнини в \mathbb{R}^4 и двойките минимални повърхнини в \mathbb{R}^3 .

В Глава 4 се разглеждат пространствено-подобни (т.е. с дефинитна метрика) повърхнини в \mathbb{R}_1^3 . Резултатите са подобни на тези от Глава 2, а тяхното получаване показва (както всъщност се вижда и при сравняване с Глави 3 и 5) как различните случаи могат да се изучават по единна схема и колко полезни за дефинициите и резултатите от Глава 1.

В Глава 5 се разглеждат пространствено-подобни повърхнини в \mathbb{R}_1^4 . Тук в резултатите има аналогия с тези от Глава 3. Съществено е обаче, че поради спецификата на индефинитния случай не се получава връзка между разглежданите тук повърхнини и двойки повърхнини в тримерно пространство.

Трябва да отбележа като общо впечатление от дисертацията не само големия брой резултати, но и детайлното изучаване във всеки от разглежданите случаи (повърхнини в \mathbb{R}^3 , \mathbb{R}^4 , \mathbb{R}_1^3 , \mathbb{R}_1^4) на различни свързани допълнителни въпроси: с каква

точност са определени каноничните координати, трансформационни формули на основните инварианти на минимална повърхнина при смяна на изотермичните координати, хомотетия и движение.

2. Анализ на публикациите.

Резултатите от дисертацията са докладвани на няколко научни форума и са публикувани в пет статии, по две в С. R. Acad. bulg. Sci. и ArXiv и една в Serdica Math. J. Първите четири са съвместни с Георги Ганчев, научен ръководител на докторанта, а последната - с двамата научни ръководители. Тъй като съм свидетел на цялата работа по дисертацията мога да потвърдя, че научният принос на Красимир Кънчев в тези статии е съществен.

3. Отражение на резултатите на дисертацията в трудове на други автори.

Известно ми е едно цитиране на статия на дисертанта в публикация на акад. Попиванов в С. R. Acad. bulg. Sci.

4. Критични бележки по дисертацията.

1) На места има излишни (според мен) повторения на еднотипни забележки. Това би било оправдано в справочник, където се очаква читателят да се интересува само от отделни части, без да чете целия текст, но в с случая става отегчително.

2) Авторството на някои твърдения е неясно и ако читателят не е добре запознат с материала, няма да разбере кои твърдения са на дисертанта, а които не са - откъде са взети.

Ясно е, че тези бележки са чисто редакционни.

5. Качества на автореферата.

Авторефератът и авторската справка ясно и правилно отразяват приносите в дисертацията.

Заклучение. От казаното по-горе е видно, че рецензираната дисертация изпълнява всички изисквания за присъждане на образователната и научна степен „доктор“ в ЗРАСРБ, Правилника за неговото приложение и съответния Правилник на Института по математика и информатика на БАН. **Поради това давам положителна оценка на дисертационния труд и убедено препоръчвам на членовете на уважаемото Научно жури да гласуват за присъждане на образователната и научна степен „доктор“ на Красимир Бориславов Кънчев.**

25.04.2018 г.

Подпис:

(проф. д-р Огнян Касабов)