

ИНСТИТУТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА  
БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ

---

АВТОРЕФЕРАТ

на

ДИСЕРТАЦИЯ

*за присъждане на образователна и научна степен доктор  
по професионално направление 4.5 Математика, научна специалност 01.01.11  
“Изследване на Операциите”*

ОЦЕНЯВАНЕ НА КОНВЕРТИРУЕМИ ЦЕННИ КНИЖА ВЪВ  
ФИНАНСОВАТА МАТЕМАТИКА

Докторант: **Красимир Димитров Миланов**

Научен ръководител: **проф. дмн. Огнян Иванов Кунчев**

София, 2016

Дисертационният труд е обсъден и насрочен за защита на научен съвет на секция „Изследване на Операциите, Вероятности и Статистика” при Институт по Математика и Информатика на Българска Академия на Науките, град София, проведен на ..... г.

Защитата на дисертационния труд ще се състои на ..... г. в зала..... на Институт по Математика и Информатика на БАН пред жури в състав:

проф. дмн. Огнян Иванов Кунчев, ИМИ при БАН

....

Дисертационният труд е на английски език с общ обем от 132 страници и включва увод, пет глави, заключение и библиография. Библиографията съдържа 57 източника на английски език. Списъкът на авторските публикации включва 3 заглавия на английски език.

Материалите по защитата са на разположение на интересуващите се в ....., всеки ден от ..... до ..... часа.

Автор на дисертационния труд: Красимир Димитров Миланов

Заглавие: Оценяване на Конвертируеми Ценни Книжа във Финансовата Математика

# Съдържание на Автореферата

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Съдържание на дисертационния труд</b>  | <b>2</b>  |
| <b>1 Обща характеристика на дисертационния труд</b>   | <b>4</b>  |
| 1.1 Актуалност на темата . . . . .  | 6         |
| 1.2 Състояние на изследваните проблеми . . . . .  | 7         |
| 1.2.1 Методи за оценяване на Конвертируеми облигации . . . . .  | 7         |
| 1.2.2 Методи за оценяване на облигации КоКо . . . . .   | 10        |
| 1.3 Цел и задачи на изследването . . . . .  | 12        |
| 1.4 Постижения на изследването . . . . .  | 14        |
| <b>2 Основно съдържание на дисертационния труд</b>  | <b>15</b> |
| Глава 1. Въведение . . . . .  | 15        |
| Глава 2. Литературен обзор . . . . .  | 15        |
| Глава 3. Модел на Цивериотис-Фернандес за цената на Конвертируема облигация и приближение с двоично дърво . . . . . | 16        |
| Глава 4. Модел за цената на Акция при фалит и приближение . . . . .   | 17        |
| Глава 5. Оценяване на Конвертируеми облигации . . . . .   | 21        |
| Глава 6. Оценяване на облигации КоКо . . . . .  | 23        |
| <b>3 Публикации и доклади на конференции и семинари по темата на дисертационния труд</b>                            | <b>31</b> |
| <b>Библиография</b>   | <b>33</b> |

# Съдържание на дисертационния труд

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introduction</b>  | <b>11</b> |
| 1.1      | Research objectives (focuses) . . . . .                                | 14        |
| 1.2      | Contributions . . . . .  | 15        |
| 1.3      | Organization of the thesis . . . . .                                   | 16        |
| <b>2</b> | <b>Literature Survey</b>   | <b>19</b> |
| 2.1      | Prehistory of the subject . . . . .                                    | 19        |
| 2.2      | Convertible Bonds . . . . .  | 23        |
| 2.3      | CoCo Bonds . . . . .   | 26        |
| 2.4      | Summary . . . . .  | 29        |
| <b>3</b> | <b>Tsiveriotis-Fernandes Model and its Binomial-tree Approximation</b> | <b>30</b> |
| 3.1      | Performance Evaluation of the Binomial-tree Approximation . . . . .    | 32        |
| 3.1.1    | CB Price Performance Evaluation . . . . .                              | 34        |
| 3.1.2    | CB Delta and Gamma Sensitivities . . . . .                             | 37        |
| 3.1.3    | Delta-Hedging (Convertible Arbitrage) of CB . . . . .                  | 41        |
| 3.1.4    | Risk Assessment of CB . . . . .  | 43        |
| 3.2      | Summary . . . . .  | 47        |
| <b>4</b> | <b>Defaultable Stock Model and its Tree Approximation</b>              | <b>48</b> |
| 4.1      | Binomial Random Walk of Defaultable Stock . . . . .                    | 49        |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| 4.2      | Analysis of Transition Probabilities . . . . .                 | 54         |
| 4.3      | Comparison with Other Models . . . . .                         | 56         |
| <b>5</b> | <b>Convertible Bond Pricing</b>                                | <b>58</b>  |
| 5.1      | Binomial Jump-to-Default (J2D) Model Derivation . . . . .      | 58         |
| 5.1.1    | Including Coupon Cash Flow . . . . .                           | 60         |
| 5.1.2    | Model Convergence . . . . .                                    | 61         |
| 5.2      | Equity-to-Credit Risk Model (E2C) . . . . .                    | 63         |
| 5.3      | Numerical Examples . . . . .                                   | 65         |
| 5.4      | Summary . . . . .  | 75         |
| <b>6</b> | <b>CoCo Bond Pricing</b>                                       | <b>76</b>  |
| 6.1      | Introduction . . . . .   | 76         |
| 6.2      | Primary Models . . . . .                                       | 78         |
| 6.2.1    | Revision of De Spiegeleer and Schoutens Model (2012) . . . . . | 79         |
| 6.2.2    | Complete Model . . . . .                                       | 83         |
| 6.2.2.1  | CoCo Bond Pricing Model Formulation . . . . .                  | 83         |
| 6.2.2.2  | Solution Using Finite Difference Approximation . . . . .       | 87         |
| 6.3      | Complete Models with Credit Risk . . . . .                     | 88         |
| 6.3.1    | Jump-to-Default Model (J2D) . . . . .                          | 88         |
| 6.3.2    | Equity-to-Credit Risk Model (E2C) . . . . .                    | 90         |
| 6.4      | Numerical Results . . . . .                                    | 90         |
| 6.5      | Summary . . . . .  | 99         |
| <b>7</b> | <b>Concluding Remarks</b>                                      | <b>100</b> |
|          | <b>Appendix A Papers and Conferences</b>                       | <b>103</b> |
|          | <b>Appendix B Tsiveriotis and Fernandes Model Derivation</b>   | <b>106</b> |
|          | <b>Appendix C Details on Single Barrier Options</b>            | <b>110</b> |
| C.1      | European options . . . . .                                     | 110        |

|                     |  |            |
|---------------------|--|------------|
| C.1.1               | Down-and-out . . . . .                 | 110        |
| C.1.1.1             | Down-and-out put options . . . . .     | 111        |
| C.1.1.2             | Down-and-out call options . . . . .    | 117        |
| C.1.2               | Down-and-in . . . . .                  | 121        |
| <b>Appendix D</b>   | <b>Finite Difference Approximation</b> | <b>124</b> |
| <b>Bibliography</b> |  | <b>127</b> |

# Глава 1

## Обща характеристика на дисертационния труд

Дисертационният труд е в областта на Финансовата Математика. В него се разглежда задачата за оценяване на конвертируеми ценни книжа. По-специално, изследването е съсредоточено върху конвертируемите облигации и облигациите от тип КоКо.

В най-общ вид, конвертируемата облигация е корпоративен дълг (ценна книга, облигация) който дава право на своя притежател да замени този дълг за определен брой акции на компанията. Ако притежателят на конвертируемата облигация не се възползва от правото си на замяна, той периодично ще получава купонни плащания по главницата на заема и накрая ще получи самата главница. Ако той избере да изпълни правото си на замяна, този дълг ще бъде затворен и притежателят ще получи известен брой акции на компанията

на предварително договорена цена. Това е причината, поради която цената на конвертируемите облигации понякога има поведение подобно на това на акция, а понякога подобно на това на обикновена облигация (корпоративен дълг).

От своя страна облигациите КоКо са най-скорошния пример на конвертируеми ценни книжа. Те представляват облигация с висок купонен процент, която трябва да бъде заменена за акции на компанията (банката) когато финансовото здраве на банката падне под критично ниво. Тези дългови инструменти възникнаха като резултат от финансовата криза на 2008 година. КоКо облигациите бяха разработени с цел посрещане на нуждите свързани с капиталовата адекватност на банките в следкризисния период.

Оценяването на конвертируемите ценни книжа е трудна задача на Финансовата математика и голямо предизвикателство, както за инвеститорите така и за регулаторите. Една от трудностите е, че цената на тези деривати зависи от фактори, които принципно се наблюдават на два отделни пазара. А именно, факторите движещи цените на облигациите и тези, които движат цените на опциите върху акции.

Затрудненията произтичат и от сложността на тези контракти – опциите, които обикновено се предоставят, и тяхното изпълняване. Най-често срещана е така наречената кол опция, която дава право на издателя (емитента) на тези контракти да си изкупи обратно дълга на определени дати или периоди срещу предварително договорена цена. За много конвертируеми облигации се предоставя такава възможност и за притежателя. Това е така наречената пут опция, която дава право на притежателя на контракта да продаде обратно (да върне) на издателя този контракт срещу предварително договорена цена валидна за определени дати или периоди от времето на дълга.

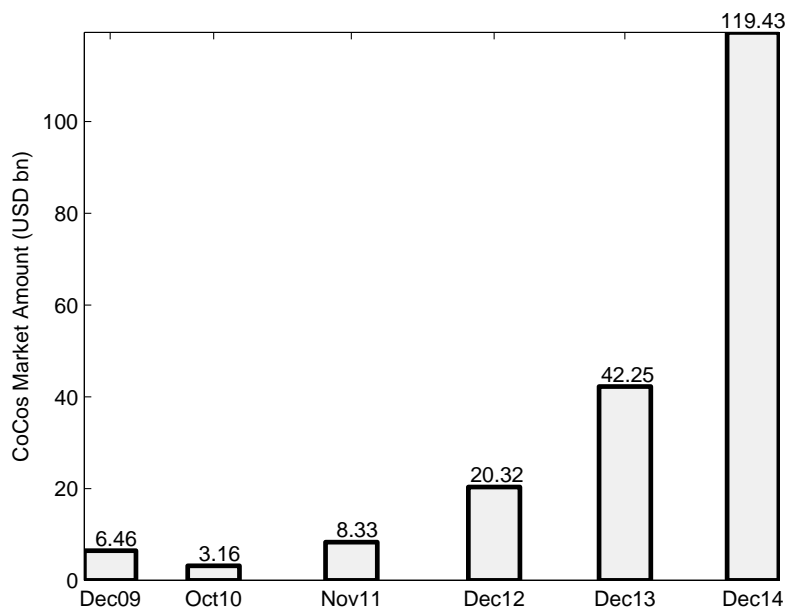
Поради тези причини не е възможно да се приложи аналитичен метод за оценяване и е необходимо да прибегваме към числени приближения.

## 1.1 Актуалност на темата

В периода след финансовата криза от 2008 година конвертируемите облигации и облигациите КоКо бяха най-дискутираните примери на конвертируеми ценни книжа. Причините за това бяха, и все още са, намалената капиталова адекватност и платежоспособност на банките и застрахователите, които застрашават стабилността и нормалното функциониране на финансовия сектор.

В този период, регулаторните органи по света се обединиха около схващането, че съществуващите изисквания за капиталова адекватност вече не са актуални. След дълги и задълбочени анализи регулаторите въведоха нови пакети от директиви като Базел 3 (Basel – III) и Платежоспособност 2 (Solvency – II). Базел 3 се отнася за банките, докато Платежоспособност 2 – за застрахователите.

С въвеждането на базелските правила се даде тласък на развитието на пазара на облигации КоКо, което може да се види на следната гифура.



Развитие на пазара на облигации КоКо. *Източник: Bloomberg Finance LP.*

Към 30 март 2016 г. размерът на глобалния пазар на облигации КоКо е US



\$275 милиарда.

Регулаторната рамка Solvency II, която влезе в сила от 1 януари 2016 година, на свой ред оформи пазарни очаквания за нарастване на търсенето на конвертируеми обликации (виж докладите на Credit Suisse ([35], 2015) и NN Investment Partners ([44], 2016), с които да се минимизира изискуемият капитал за платежоспособност, запазвайки високо ниво на диверсификация и възможности за печалби от пазара на акции.

## 1.2 Състояние на изследваните проблеми

### 1.2.1 Методи за оценяване на Конвертируеми обликации

В днешно време най-популярните и широко използвани в практиката модели за оценяване на конвертируеми обликации са моделът на Цивериотис и Фернандес ([50], 1998) и моделът на Айяш, Форсайт и Ветзал ([3], 2003). За успешното им утвърждаване можем да съдим по множеството референции, както и от програмното им реализиране в аналитични системи, предлагани от авторитетни доставчици като Блумбърг, Томсън Ройтерс, Финкад и др.

Самият модел на Цивериотис и Фернандес е разработен за целите на Джей Пи Морган. През 1998, в стремежа си да въведат кредитния спред,  $r_c$ , като компенсация за фалит на емитента, Цивериотис и Фернандес разглеждат цената  $V$  на една конвертируема облигация, като сума от две компоненти

$$V = B + E,$$

където  $B$  отразява стойността на всички парични потоци, непроизтичащи от акцията, и зависи от кредитното състояние на емитента, а  $E$  представлява стойността на плащанията, свързани с акцията, и независеща от кредитното състояние на емитента. По-нататък, допускането, че цената  $S$  на акцията, следва геометрично Браунове движение

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW$$

дава възможност на авторите да формулират задачата за оценяване на конвертируеми облигации в контекста на системата частни диференциални уравнения

$$\begin{aligned} V_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} + rSV_S - rV - Br_c &= 0 \\ B_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 B_{SS} + rSB_S - (r + r_c)B &= 0, \end{aligned}$$

решенията на която да удовлетворяват условията и ограниченията, произтичащи от спецификите на контракта. За да намерят решението на тази система, Цивериотис и Фернандес прилагат явната схема от метода на крайни разлики.

За много хора във финансите обаче, тези методи не са много интуитивни, поради което те са склонни да ги пренебрегват и да предпочитат използването на приближение с помощта на двоично дърво – като по-интуитивен, с приемлива прецизност и пестящ изчислително време подход. Според нас, това е една от причините, поради която Хъл ([33], 2000) представя апроксимация с двоично дърво (от вида на Кокс, Рос и Рубинщайн [14], 1979) на модела на Цивериотис и Фернандес. В резултат на това, тази апроксимация както и моделът на Цивериотис и Фернандес са широко използвано и популярно в практиката средство за оценяване на конвертируемите облигации.

В тази връзка, ние считаме, че е необходимо да се даде отговор на въпроса: Позволява ли апроксимацията с двоично дърво на Хъл (2000) прецизно оценяване, хеджиране и определяне на риска на конвертируемите облигации?

През 1999, Дейвис и Лишка ([19], 1999) слагат началото на съвременната идея за оценяване на конвертируемите облигации. Недвусмисленото включване на интензитета за фалит в дрифта на акцията, нулевата цена на акцията при настъпване на фалит и включването на частично възстановяване след настъпване на фалит правят този подход по-логически построен и по-реалистичен от предлаганите дотогава. По отношение динамиката на акцията това означава, че нарастванията на акцията се представят като

$$dS_t = (r + \lambda) S_t dt + \sigma S_t dW_t - S_t dq_t,$$

където  $W_t$  и  $q_t$  са независими процеси, съответно на Винер и на Пуасон, с постоянен интензитет  $\lambda$ . Това всъщност е известното от Мертън ([40], 1976) пред-

ставяне за динамика на акция, при която се случва пълно обезценяване при настъпване на фалит. По отношение на алгоритъма за оценяване на деривата Дейвис и Лишка предлагат построяване на тройно-разклоняваща се дървовидна структура за чието построяване не предоставят каквато и да било информация.

Впоследствие, Айяш, Форсайт и Ветзал ([3], 2003) подобряват гореспоменатите методологии като подсигурият още няколко реалистични предположения. По-точно, те моделират по-прецизно влиянието на фалита върху стойността на дълга и акцията. Така например, при настъпване на фалит се дава възможност цената на акцията да намалява със скок от  $\eta$  процента, а притежателят на конвертируемата облигация да има свобода на избор между възстановяване на част от главницата и конвертиране в акции. В резултат на това, авторите извеждат, че цената  $V$  на конвертируема облигация трябва да удовлетворява следното частно диференциално уравнение

$$V_t + \frac{\sigma^2 S^2}{2} V_{SS} + (r + \lambda\eta)SV_S - (r + \lambda)V + \lambda \max(RN, k(1 - \eta)S) = 0$$

както и условията произтичащи от спецификите на контракта. За намирането на решение на така формулираната задача, авторите прилагат схемата на Кранк и Никълън с крайни разлики.

Можем да кажем, че поради горе-посочените практически съображения през 2011 година, Hull ([32], 2011) и Де Шпигелер и Шоутенс (2011) предлагат метод за оценяване с помощта на дървовидна структура, като при настъпване на фалит на емитента, цената на акцията става равна на нула. Дървовидната структура във всеки от предлаганите методи наподобява двоичното дърво от вида на Кокс, Рос и Рубинщайн с допълнително състояние, което да съответства на състоянието на фалит.

Тук трябва да отбележим, че предлаганите дървовидни структури (респективно методи за оценяване) се различават, въпреки че по описание би трябвало да приближават един и същ случаен процес за акцията, а именно представянето за скок при фалит (с пълно обезценяване) на Мертън използвано от Дейвис и Лишка. Освен това, авторите не предоставят изчерпателна информация по ос-

новни направления на моделирането, като моделиране на ефекта от настъпване на фалит, логически извод на алгоритъма за оценяване на деривата, а също и сходимост на получения числен алгоритъм.

## 1.2.2 Методи за оценяване на облигации КоКо

Академичната литература за оценяване на облигации КоКо започва с работите на Албул, Джафии и Тчисти ([1], 2010) и Гласерман и Нури ([27], 2010). Тези автори построяват методологията си в контекста на така наречения структуриран подход, при който основен фактор на несигурност в оценяването на КоКо облигация е стойността  $V$  на фирмата. В предложените методи се приема, че стойността на фирмата следва лог-нормален дифузионен процес, точно както при първите модели за оценяване на конвертируеми облигации. Тези модели позволяват намирането на редица аналитични решения свързани с капиталовата структура на една банка, което ги прави полезни за регулаторни цели. Въпреки това, ние считаме, че тези модели имат четири съществени ограничения.

Първото е свързано с начина на изплащане на купоните – предполага се, че плащанията са непрекъснати порции във времето. В резултат на този подход, теоретичната цена няма да следва типичното поведение на пазарната цена, която намалява с размера на купона в момента на купонно плащане. Второто се отнася до невъзможността да се разглеждат различни плаващи купонни структури, които се наблюдават в над 60% от наличните на пазара облигации КоКо. Третият недостатък засяга невъзможността да се моделира кол опцията за обратно изкупуване (най-често срещана от тип Бермуда), която се наблюдава в над 80% от наличните на пазара облигации КоКо. Накрая, и не на последно място, моделът е зависим от пазарни данни, които се обявяват с лаг, т.е. не са непрекъснато наблюдаеми.

Първите алтернативи на структурирания подход при оценяването на облигации КоКо бяха предложени от Де Шпигелер и Шоутенс ([21], 2012). Предложе-

ните модели са разглеждани в контекста на теорията за оценяване на опции на Блек и Шолс ([6], 1973), което позволява намиране на аналитично решение на проблема. За целта, цената на КоКо облигация се представя като портфейл от обикновена облигация и Европейски бариерни даун-ин опции. Ние считаме, че този подход има два основни недостатъка и те са свързани с пренебрегването на кол опцията за обратно изкупуване и факта, че моментът на замяна в акции на банката може да настъпи много преди падежа на облигацията КоКо.

Впоследствие се предлагат няколко подобрения на този модел, запазвайки идеята за репликационен портфейл и теорията за оценяване на опции. Например, Гало ([26], 2011) прилага Монте Карло симулации за дифузия със скокове (*jump-diffusion*) на Мертън ([40], 1976) за акцията със стохастичен модел на Хестън ([30], 1993) за волатилността  $\eta$ . Ползването на симулации позволява на автора да не пренебрегва възможността за ранна замяна на контракта в акции, като разглежда опциите от репликационния портфейл от Американски тип. Този подход обаче изисква значително изчислително време, тъй като Монте Карло техниката трябва да бъде прилагана за всяка от Американските опции.

Докато фокусът на Гало е върху възможността за калибриране и използване на така наречените волатилни усмивки на опциите, Черидито и Ксю ([17], 2014) насочват вниманието си върху извличането на информация за кредитното състояние на банката. Те предлагат два варианта на идеята за скок при фалит на Мертън ([40], 1976). И в двата варианта първите два скока съответстват на момента на замяна на контракта в акции и на момента на фалит на емитента на контракта. Във втория си вариант, авторите добавят една Бернулиева променлива, с която да контролират това дали фалитът настъпва непосредствено със замяната в акции или по-късно във времето.

През 2012, Тенеберг ([49], 2012) построява тройно-разклоняваща се дърво-видна структура за цената на акция следваща *jump-diffusion* модел на Мертън ([40], 1976) с чиято помощ да оценява бариерните опции в репликацията на Де Шпигелер и Шоутенс. Съкращавайки периода на КоКо облигацията до деня

на първата кол дата<sup>1</sup>, Тенеберг осигурява много грубо приближение за цената на КоКо облигация с прикачена към нея кол опция.

Можем да обобщим, че като цяло, всички тези методи не успяват да включат и отразят влиянието на кол опцията върху цената на една КоКо облигация. Също така, тези модели са повече или по-малко ориентирани към едната от инвеститорските групи – тези, които предимно участват на пазара на акции и тези, които предимно участват на пазара за фиксирана доходност.

През 2014, Де Шпигелер, Хуле и Шоутенс ([22], 2014) представят методика за оценяване на КоКо облигации, с помощта на тройно-разклоняваща се дървовидна структура съответстваща на процес от вида скок при фалит (с пълно обезценяване) на Мергън ([40], 1976). За съжаление, и в тази си книга, авторите не предлагат детайли свързани с моделирането на кол опцията на КоКо облигациите.

В този контекст, предлагаме на вниманието на читателя на дисертацията едно емпиричното изследване на Вилкенс и Бетке ([51], 2013). В нея се проверява как се справят повечето от описаните по-горе модели върху реални облигации КоКо. В резултат на това, авторите подчертават нуждата от задълбочени изследвания върху моделирането на кол опцията, прикрепяна към КоКо облигациите.

### 1.3 Цел и задачи на изследването

Целта на тази дисертация е в две насоки. Първата е да се изследват и подобрят съществуващите методи за оценяване на конвертируеми облигации в зависимост от кредитното състояние на емитента им. Втората е да се изследват предизвикателствата, свързани с оценяване на инструментите от най-новия пазарен сегмент на конвертируемите ценни книжа, пазара на облигации КоКо.

По отношение на конвертируемите облигации, искахме да се подобри разбирането на съществуващите методи за оценяване на конвертируеми облигации,

---

<sup>1</sup>Това е първия ден, на който може да се осъществи обратно изкупуване на контракта.

реализирани в контекста на дървовидна структура. За тази цел, нашата първа задача беше да се даде отговор на въпроса: Позволява ли апроксимацията с двоично дърво на Хъл ([33], 2000) за модела на Цивериотис и Фернандес ([50], 1998), прецизно оценяване, хеджиране и определяне на риска на конвертируемите облигации? Следваща задача беше да се изследва несъответствието между методите на Хъл ([32], 2011) и Де Шпигелер и Шоутенс ([20], 2011) за оценяване на конвертируеми облигации в контекста на динамика за акцията от вида скок при фалит (с пълно обезценяване) на Мертън ([40], 1976). В резултат на това изследване, да се построи метод за оценяване на конвертируеми облигации в контекста на скок при фалит с частично обезценяване на акцията, както при популярния модел на Айяш, Форсайт и Ветзал ([3], 2003). Също така да се обърне внимание на всички аспекти от моделирането при създаване на метода за оценяване: ефект от фалит, анализ на вероятностите за придвижване по дървото, сходимост на получаваното решение и други особености.

В резултат на натрупания опит от задачата за оценяване на конвертируеми облигации и направеното проучване за предизвикателствата, свързани с оценяването на облигациите КоКо, се оформиха следните задачи. Да се ревизира формулата на Де Шпигелер и Шоутенс ([21], 2012), така че да бъде използвана за всички нужди от практика. В рамките на логнормално поведение на акцията (допускано от Де Шпигелер и Шоутенс), да се построи цялостен модел за оценяване. Под цялостен модел да се разбира модел, който не пренебрегва кол опцията (срещана в около 80% от всички налични на пазара облигации КоКо), и възможността за замяна в акции на банката преди падежа на облигацията. Също така, да позволява изчисляване освен на риск статистиките на инвеститорите в акции (делта, гамма и т.н.) и тези на инвеститорите във фиксирана доходност (дюрация, ефективна дюрация, изпъкналост и ефективна изпъкналост). Последната задача е, да се построи и реализира цялостен модел за оценяване на облигации КоКо, който да отразява ефекта от настъпване на фалит.

## 1.4 Постижения на изследването

Тази дисертация представя няколко оригинални приноса в областта на Финансовата математика. Това са:

- Построена е дървовида структура, която да апроксимира динамиката на акция с частично или пълно обезценяване в резултат на настъпване на фалит на емитента ѝ. Това е аналогична стъпка в сферата на оценяване на финансови деривати, реализирана от Кокс, Рос и Рубинщайн ([14], 1979).
- Получен е метод за оценяване на конвертируеми облигации в зависимост от кредитното състояние на емитента им. Този метод е едно разширение и корекция на авторитетните методи на Хъл ([32], 2011) и Де Шпигелер и Шоутенс ([20], 2011) за оценяване на конвертируеми облигации, развити в рамките на двоично дърво. Също така е показано, че получаваната цена от този метод ще удовлетворява частното диференциално уравнение от популярния модел на Айяш, Форсайт и Ветзал ([3], 2003), когато времева стъпка в използваното двоично дърво (със скок при фалит) клони към нула. В допълнение, след леки промени, този модел може да бъде използван за оценяване на широк кръг от финансови деривати върху акция, в зависимост от кредитното състояние на емитента им.
- Построени са два модела за оценяване на облигации КоКо. Първият е получен в рамките на модела на Блек и Шолс ([6], 1973), т.е. без включване на кредитния риск носен от тези облигации. Вторият отразява ефекта от настъпване на фалит с помощта на динамиката скок при фалит за акцията, която използвахме при оценяването на конвертируеми облигации. С цел постигане на по-висока прецизност, формулировката (в двата модела) на задачата за оценяване на облигации КоКо е в термините на частните диференциални уравнения, а численият метод построен за тези задачи е базиран на апроксимация с крайни разлики.



Тези методи позволяват оценяване на облигации КоКо за дадена времева структура на лихвите. В резултат на това, освен статичните рискови статистики делта, гама, дюрация и изпъкналост ще може да се изчисляват и ефективна дюрация и ефективна изпъкналост без да се пренебрегват възможностите за ранно прекратяване (чрез обратно изкупуване или замяна в акции) на контракта.

- Дадено е въведение за така нареченото семейство на  $\theta$ -методите на крайни разлики, с помощта на което подсилваме интуицията към тези методи и подчертаваме тяхната съвместимост с частното уравнение.

## Глава 2

# Основно съдържание на дисертационния труд

### Глава 1. Въведение

Тази глава съдържа общите характеристики на дисертацията.

### Глава 2. Литературен обзор

В тази глава е описана еволюцията на моделите за оценяване и методите, използвани за апроксимация и получаване цената на конвертируеми облигации и облигации КоКо.

## Глава 3. Модел на Цивериотис-Фернандес за цената на Конвертируема облигация и приближение с двоично дърво

Моделът на Цивериотис и Фернандес ([50], 1998) както и неговото приближение с помощта на двоично дърво представено от Хъл ([33], 2000), са едни от най-популярните средстава използвани в практиката за оценяване на конвертируеми облигации. Поради тази причина насочихме вниманието си към построяването на този модел както и към отговора на въпроса: Позволява ли апроксимацията с двоично дърво на Хъл (2000) прецизно оценяване, хеджиране и определяне на риска на конвертируемите облигации?

За целта, в тази глава сме описали както модела, така и неговото приближение. Освен това сме предоставили алтернативен извод на уравненията за динамика, в резултат на което можем да подчертаем, че моделът на Цивериотис-Фернандес предполага, че цената на акцията (на емитента на конвертируемата облигация) не се променя при настъпване на фалит на емитента.

Следвайки концепциите на Мертън ([40], 1976), Кларк и Вайнщайн ([18], 1983) и много други изследователи за поведението на цената на акцията на една компания при настъпване на нейния фалит, ние считаме, че това допускане в модела на Цивериотис-Фернандес не е реалистично и ще води до надценяване на контракта.

В параграф 3.1 е изложено описанието на резултатите от експериментите, проведени за модела на Хъл (2000). Експериментите са представителни за основни дейности от практиката, в областите *оценяване*, *хеджиране* и *определяне на риска*. Използван е известният и типичен пример на конвертируема облигация от статията на Цивериотис и Фернандес ([50], 1998, Таблица 5)

Изпитанията, които са направени се изразяват в проверка на очакванията за влиянието на цената на акцията (като основен източник на несигурност) върху профила на цената на конвертируемата облигация, на мерките за чувст-

вителност делта и гама, на арбитражната стратегия, и на оценката на риска.

В резултат на проведените непреднамерени тестове, можем да кажем, че методологията на Хъл (2000) би ни поставила в затруднение да проведем прецизен анализ, независимо от броя на съпките в двоичното дърво.

## Глава 4. Модел за цената на Акция при фалит и приближение

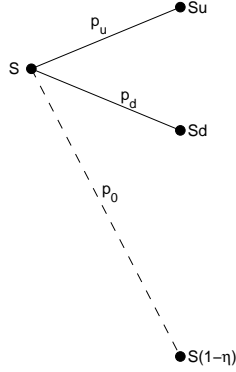
В тази глава представяме концепция за ефекта от настъпване на фалит на една компания върху цената на нейните акции. В този смисъл приемаме, че цената  $S$  на акцията следва (в риск неутралния свят) процес от вида

$$dS_t = (r + \lambda\eta) S_t dt + \sigma S_t dW_t - \eta S_t dq_t$$

където  $W_t$  е процес на Винер, а параметрите  $r$  и  $\sigma$  представят съответно нивото на безрисковата лихва на пазара и волатилността на цената  $S$  от дифузионното и поведение. Процесът  $q_t$  е процес на Пуасон с интензитет  $\lambda$ , който е независим от процеса  $W_t$ . Ролята на процеса  $q_t$  е, с настъпването на първата си реализация, да отчита настъпването на събитието “*фалит*”, при което цената на акцията ще трябва да падне с  $\eta$  процента. За целта е доказано следното твърдение:

**Твърдение.** *В момента на точно една реализация на процеса на Пуасон, стойността на разглеждания процес пада с точно  $\eta$  процента.*

В параграф 4.1 дефинираме съпоставянето на дървовидна структура като апроксимация за възприетия непрекъснат модел за цената  $S$  на акцията. Това приближение представлява едно разширение на двоичното дърво на Кокс, Рос и Рубинщайн ([14], 1979), с добавяне на допълнително въображаемо листо на дървото, съответстващо на състоянието фалит на компанията, както е показано на фигурата по-долу:



Образец на разклонението в дървовидната структура

Стойностите  $Su$ ,  $Sd$  и  $S(1 - \eta)$  представляват възможните нива за цената на акцията в края на период от време  $\delta t$ , при условие, че в началото на периода цената на акцията е била равна на  $S$ . Означенията  $p_u$ ,  $p_d$  и  $p_0$  представляват съответно вероятностите за нарастване (с множител  $u$ ), намаляване (с множител  $d$ ) и ниво при фалит на цената на акцията. От дефинирането на събитието фалит следва, че

$$p_0 = 1 - e^{-\lambda \delta t}.$$

За да определим параметрите на построение (на тази апроксимация), е необходимо и достатъчно да определим параметрите  $u$ ,  $d$ ,  $p_u$  и  $p_d$ . За целта ще искаме първият и вторият централни моменти на нарастването на цената на акцията за време  $\delta t$  да бъдат равни на съответните моменти по дървовидната структура (за всяко разклонение). Това ще ни гарантира две уравнения за четирите неизвестни, а именно

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( \frac{S_{t+\delta t}}{S_t} \right) &= e^{r\delta t} = p_u u + (e^{-\lambda \delta t} - p_u) d + (1 - \eta) (1 - e^{-\lambda \delta t}) \\ \mathbb{D} \left( \frac{S_{t+\delta t}}{S_t} \right) &= (\sigma^2 + \lambda \eta^2) \delta t = p_u u^2 + (e^{-\lambda \delta t} - p_u) d^2 + (1 - \eta)^2 (1 - e^{-\lambda \delta t}) - e^{2r\delta t} \end{aligned}$$

За да допълним системата от уравнения до четири, първо ще се възползваме от естественото условие сумата от вероятностите за всички състояния да е равна

на единица, тоест

$$p_u + p_d + p_0 = 1,$$

и второ, ще поискаме  $ud = 1$ , което ще ни гарантира свързаност на върховете на дървото съответстващи на дифузията – които ще бъдат основния гръбнак за построяване на бъдещи алгоритми за оценяване на деривати върху акции, точно както при модела на Кокс, Рос и Рубинщайн.

Поради тази причина, така определената дървовидна структура ще наричаме *двоично* или *биномно дърво* за цената на акция със скок при фалит. Решението на въпросната система, както и всички параметри на построение, са представени в следната таблица.

Параметри на биномно дърво за цената на акция със скок при фалит

| Параметър                                     | Дефиниция   |
|---|---|
| Множител за преместване нагоре                | $u = e^{\sigma\sqrt{\delta t}}$   |
| Множител за преместване надолу                | $d = e^{-\sigma\sqrt{\delta t}}$  |
| Вероятност за преместване нагоре              | $p_u = \frac{e^{r\delta t} - e^{-\lambda\delta t}d - (1-\eta)(1 - e^{-\lambda\delta t})}{u-d}$  |
| Вероятност за преместване надолу              | $p_d = -\frac{e^{r\delta t} - e^{-\lambda\delta t}u - (1-\eta)(1 - e^{-\lambda\delta t})}{u-d}$ |
| Вероятност за фалит                           | $p_0 = 1 - e^{-\lambda\delta t}$  |
| Дължина на времевата стъпка в биномното дърво | $\delta t$  |

За да се покрият практическите нужди при построяването на този вид биномно дърво, в параграф 4.2 е направен анализ на вероятностите за придвижване по дървото. За целта са доказани следните твърдения.

**Твърдение.** *За всяко пазарно състояние, описано от стойностите на параметрите  $r > 0$ ,  $\sigma > 0$ ,  $\lambda \geq 0$ ,  $0 \leq \eta \leq 1$  и за произволна дължина  $\delta t$  на стъпката в двоично дърво за цената на акция със скок при фалит, параметърът  $p_u$  съответстващ на вероятността за придвижване нагоре на цената на акцията удовлетворява условието  $p_u > 0$ .*

**Следствие.** За всяко пазарно състояние, което задава параметрите  $r > 0$ ,  $\sigma > 0$ ,  $\lambda \geq 0$ ,  $0 \leq \eta \leq 1$  и за произволна дължина  $\delta t$  на стъпката в двоично дърво за цената на акция със скок при фалит, параметърът  $p_d$  съответстващ на вероятността за придвижване надолу на цената на акцията удовлетворява условието  $p_d < 1$ .

**Твърдение.** Условието  $p_d \geq 0$  е необходимо и достатъчно стойностите на параметрите  $p_u, p_d$  и  $p_0$  да принадлежат на интервала  $[0, 1]$ .

Основният резултат в този параграф се отнася за възможността да се прави прецизно построение на биномното дърво. Следващата теорема дефинира горна граница за дължината на стъпката в биномното дърво, за която предлаганата схема е правдоподобна и съвместима по отношение на дадено пазарно състояние.

**Теорема.** За всяко пазарно състояние, което задава параметрите  $r > 0$ ,  $\sigma > 0$ ,  $\lambda \geq 0$ , и  $0 \leq \eta \leq 1$ , условието

$$\lambda \delta t \leq \ln \left( \frac{u - (1 - \eta)}{e^{r\delta t} - (1 - \eta)} \right)$$

е необходимо и достатъчно стойностите на параметрите  $p_u, p_d$  и  $p_0$  да принадлежат на интервала  $[0, 1]$ .

В параграф 4.3 е направено сравнение с предложените от Хъл ([32], 2011) и Де Шпигелер и Шоутенс ([20], 2011) дървовидни схеми за апроксимация на динамиката на акция от вида на Мертън ([40], 1976), т.е.

$$dS_t = S_t ((r + \lambda)dt + \sigma dW_t - dq_t)$$

В контекста на нашите разглеждания тази динамика се постига за  $\eta = 1$ . Това означава, че за случая на акция изплащаща непрекъснат дивидент  $q$ , риск неутралната вероятност за придвижване нагоре (на цената на акцията) в нашата схема се задава от

$$p = \frac{e^{(r-q)\delta t} - de^{-\lambda\delta t}}{u - d}$$

докато дефиницията за същата вероятност от Де Шпигелер и Шоутенс ([20], 2011, уравнение 6.77, стр. 110, както и Таблица 6.2, стр. 111) е непълна, задавайки я с израза

$$p = \frac{e^{(r+\lambda-q)\delta t} - d}{u - d}.$$

По отношение на сравнението ни с модела на Хъл ([32], 2011, стр. 608-610) можем да кажем, че докато вероятностите за придвижване напълно съвпадат, основната разлика е в множителя  $u$  за увеличаване на цената на акцията. Без да предостави детайли за получаването на параметрите за двоичното дърво, предложението на Хъл е

$$u = e^{\sqrt{(\sigma^2 - \lambda)\delta t}}.$$

За нас основният проблем за модела на Хъл е, че в практиката много често се наблюдават пренебрежимо близки стойности за  $\sigma^2$  и  $\lambda$ . В резултат на това, процесът за цената на акцията по дървото ще има твърде ниска волатилност и различна от тази на изходния процес, а това от своя страна ще води до подценяване на опциите (върху акцията), прикачени към конвертируема облигация, респективно до подценяване на самата конвертируема облигация.

## Глава 5. Оценяване на Конвертируеми облигации

В тази глава построяваме модел за оценяване на конвертируеми облигации, използвайки направената от нас апроксимацията с двоично дърво за цена  $S$  на акция със скок при фалит

$$dS_t = S_t ((r + \lambda\eta)dt + \sigma dW_t - \eta dq_t),$$

където интензивността  $\lambda$  за настъпване на фалит е константа. Този модел наричаме биномен със скок при фалит и означихме с J2D като съкращение на *jump-to-default*.

В рамките на модела J2D, обръщаме специално внимание на оценяването на купонните плащания, както и на сходимостта на получаваната по дървото цена

на конвертируема облигация, когато дължината на стъпката в дървото клони към нула. В резултат на това показваме, че когато стъпката в биномното дърво клони към нула, цената на конвертируемата облигация по предложеното дърво удовлетворява частното диференциално уравнение (ЧДУ) в популярния модел на Айяш, Форсайт и Ветзал ([3], 2003).

В оставащата част от тази глава реализираме метод за оценяване, при който правм допускане за наличие на връзка между интензитета за фалит и цената на акцията. По-точно използваме формата (използвана от Муромачи ([42], 1999), Такахаши, Кобаяши и Накагава ([47], 2001), Айяш, Форсайт и Ветзал ([3], 2003) и др.)

$$\lambda(S) = \lambda_0 \left( \frac{S}{S_0} \right)^\alpha,$$

където  $\lambda_0 > 0$  е интензитетът съответстващ на начално ниво  $S_0$  на акцията, а  $\alpha < 0$ . Така получения модел за оценяване на конвертируема облигация означаваме с E2C, като продължение на използваната преди нас абривиатура на *equity-to-credit*. Този модел е по реалистичен от модела J2D, защото с намаляването на цената на акцията под началното ниво  $S_0$  ще се увеличава компенсацията за настъпване на фалит. В резултат на това ще намалява цената на конвертируемата облигация – свойство познато от моделите на Ингерсол ([34], 1977) и Бренан-Шварц ([8], 1977), но в известна степен пренебрегвано от по-късните модели.

Въпреки това, на практика този модел може да изисква контрол върху дължината на стъпката в биномното дърво. Както вече показахме в теоремата от предходната глава, може да се наложи увеличаване броя на стъпките, което ще изисква допълнително изчислително време. Поради тази причина, в практиката много често броя на стъпките в биномните дървета е предопределен. За такъв случай, моделът E2C налага познаване на долна граница за цената на акцията, под която методът не е в съответствие с теорията и може да продуцира неинтуитивни и неверни резултати. В тази връзка доказваме следното твърдение.



**Твърдение.** За дадена дървовидна структура с времева стъпка  $\delta t > 0$ , условието

$$S \geq S_0 \left[ \frac{1}{\lambda_0 \delta t} \ln \left( \frac{u - (1 - \eta)}{e^{r\delta t} - (1 - \eta)} \right) \right]^{1/\alpha}, \alpha < 0 < \lambda_0$$

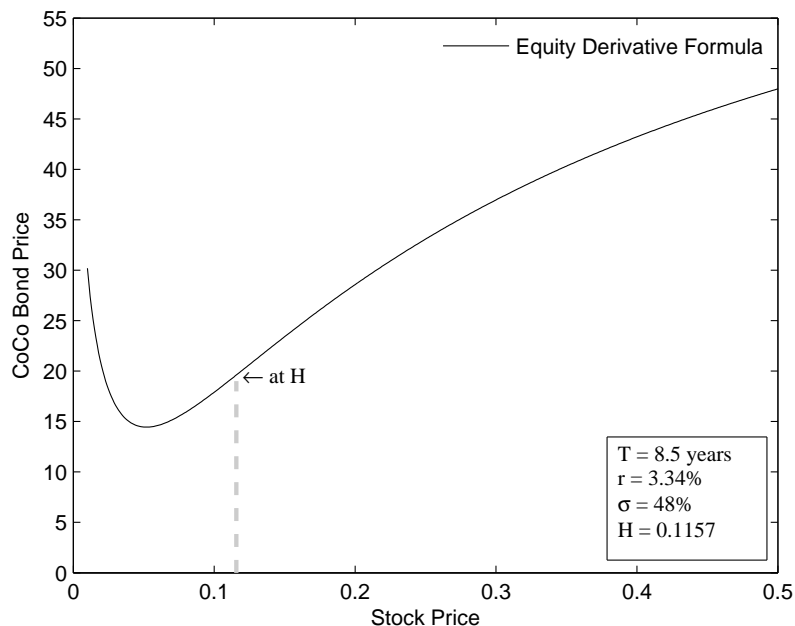
е необходимо и достатъчно стойностите на параметрите  $p_u, p_d$  и  $p_0$  да принадлежат на интервала  $[0, 1]$ .

Финалната част на тази глава съдържа множество числени тестове и сравнения на построените в тази глава методи със методите на Айяш, Форсайт и Ветзал ([3], 2003), Цивериотис и Фернандес ([50], 1998) и Хъл ([32], 2011), които демонстрират постигането на целите ни по отношение на задачата за оценяване на конвертируеми облигации.

## Глава 6. Оценяване на обликации КоКо

В тази глава се разглежда задачата за оценяване на облигации КоКо. Изследването започва с ревизиране на популярната апроксимация *Equity Derivative Approach* на Де Шпигелер и Шоутенс ([21], 2012, р. 32). Основният източник на несигурност в тази апроксимация е цената  $S$  на акцията, за която се прави първичното допускане да следва лог-нормално поведение. Съгласно тази апроксимация, цената на облигация КоКо се задава като стойност на портфейл от подходящо избрани обикновена облигация и Европейски бариерни опции върху акцията на банката, за които са известни аналитични решения. Полученият по този начин метод е невалиден за стойности на акцията по-малки от бариерното ниво  $H$ , което за разлика от търгуваните бариерни опции сега е пазарна оценка за праг на влошено капиталово състояние на банката, при което облигацията трябва да се замени за акции на тази банка. Следващата фигура, показва нетипичното поведение за цената<sup>1</sup> на облигация КоКо продуцирана от апроксимацията на Де Шпигелер и Шоутенс.

<sup>1</sup>Около момента на замяна в акции се очаква цената на една облигация КоКо да следва цената на акцията.

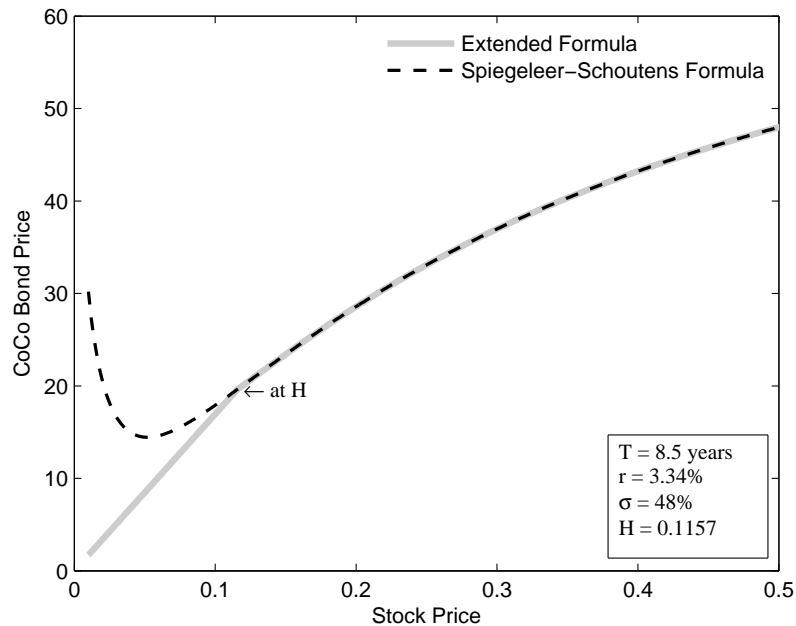


Профил на КоКо облигация без купонни плащания

От практическа гледна точка, особено за провеждане на стрес тестове, изчисляване на VaR и CVaR, е от особено значение методът за оценяване на КоКо облигациите да може да определя цената им за нива на цената на акцията по-малки от  $H$ . В този смисъл, ние обобщаваме формулите за бариерните опции в модела на Де Шпигелер и Шоутенс, изхождайки от тяхната дефиниция. Така например, Европейските даун-ин опции са додефинирани с помощта на съответната стандартна (кол или пут) опция за стойности на акцията по-малки от  $H$ , т.е.

$$V_{di} = \begin{cases} V_{vanilla} - V_{do}, & S \geq H \\ V_{vanilla}, & S < H \end{cases}$$

където  $V_{do}$  е даун-аут опция със същите бариера, страйк и падеж както на даун-ин опцията участваща в модела на Де Шпигелер и Шоутенс. Следващата фигура, показва очакваното поведение за цената на облигация КоКо продуцирана от ревизираната (обобщената) формула в сравнение с резултата от формулата на Де Шпигелер и Шоутенс.



Сравнение между ревизираната и оригиналната формула.

Главната мотивация за настоящото изследване беше липсата на метод за оценяване на облигации КоКо, който да съдържа следните атрибути:

- не пренебрегва възможността за ранна замяна в акции преди падежа на контракта
- отразява възможността за ранно изпълнение на кол опцията
- не зависи от изискването бариерното ниво  $H$  да не бъде по-голямо от  $E$  – цената на акцията за изпълнение на опцията за замяна в акции
- подходящ както за инвеститорите с приоритет инвестиране в акции така и за тези с приоритет инвестиране в облигации
- позволяващ висока прецизност.

В съответствие с горните изисквания, в параграф 6.2.2 ние формулираме задачата за оценяване на облигации КоКо в термините на задачите със свободни граници. А именно, в рамките на модела на Блек и Шолс, цената  $V$  на КоКо облигация като функция на цената  $S$ , е решение на уравнението

$$V_t + \frac{\sigma^2}{2} S^2 V_{SS} + (r - q) S V_S - rV = 0$$

Решението на това уравнение удовлетворява условията, произтичащи от спецификите на контракта, а именно

**Крайно условие:** Определя плащането на падежа  $T$ :

$$V(S, T) = \begin{cases} \kappa S, & S \leq H \\ F + c, & S > H \end{cases}$$

Тук,  $\kappa$  означава брой акции за бонд,  $F$  означава номиналната стойност,  $H$  представлява нивото, при което се извършва замяната в акции, а  $c$  означава размерът на последния купон.

**Долно гранично условие:**

$$V(S_*, t) = \kappa S_*$$

където  $S_* > 0$  е близко до нула.

**Горно гранично условие:**

$$V(S^*, t) = B(t), \quad \text{където}$$

$$B(t) = F \left( e^{-r(T-t)} + \sum_{i: t_i^c \geq t} c_i e^{-r(t_i^c - t)} \right)$$

означава цената на облигация с размер на купонните плащания  $c_i$  в моментите  $t_i^c$ , а  $S^*$  е достатъчно голямо ниво за цената на акцията. Допускайки, че облигацията може да бъде изкупена обратно от емитента ѝ на цена  $V^c$  на датите от множеството  $\mathcal{D}$ , ние трябва да наложим условието

$$V(S^*, t) = \min(B(t), V^c), \quad t \in \mathcal{D}$$

**Условие за свободна граница:** Отразява факта, че във всеки един момент стойността на една облигация КоКо не може да бъде по-голяма от стойността ѝ  $G$  при ранно прекратяване. С други думи, ако с  $\mathcal{V}(S, t)$  означим произволна функция, която е решение на ЧДУ, то решението на разглежданата задача

трябва да удовлетворява условието:

$$G(S, t) = \begin{cases} \kappa S, & S \leq H \\ \min(B(t), V^c), & S > H \end{cases} \quad (2.1)$$

$$V(S, t) = \min(\mathcal{V}(S, t), G(S, t))$$

За да намерим решение на тази задача, първо ще извършим трансформацията  $\tau = \frac{\sigma^2}{2}(T - t)$ . С помощта на тази трансформация групираме параметрите, които могат да имат времева структура, в резултат на което ще се улесни реализацията на числения метод. След това извършваме трансформацията  $S = He^x$ ,  $-\infty < x < +\infty$ , за да получим ЧДУ с параметри, които не зависят от пространствената променлива.

Така, използвайки означенията

$$k_1 = \frac{2r}{\sigma^2}, \quad k_2 = \frac{2q}{\sigma^2}$$

$$x_* = \log\left(\frac{S_*}{H}\right), \quad x^* = \log\left(\frac{S^*}{H}\right)$$

задачата за оценяване на облигации КоКо приема вида

$$u_\tau = u_{xx} + (k_1 - 1 - k_2)u_x - k_1 u$$

for all  $\tau \in \left(0, \frac{\sigma^2}{2}T\right)$ , and  $x \in (x_*, x^*)$

**Начално условие:**

$$u(x, 0) = \begin{cases} \kappa H e^x, & x \leq 0 \\ F + c, & x > 0 \end{cases}$$

**Долно гранично условие:**

$$u(x_*, \tau) = \kappa H e^{x_*}$$

**Горно гранично условие:**

$$u(x^*, \tau) = \min(B(\tau), V^c)$$

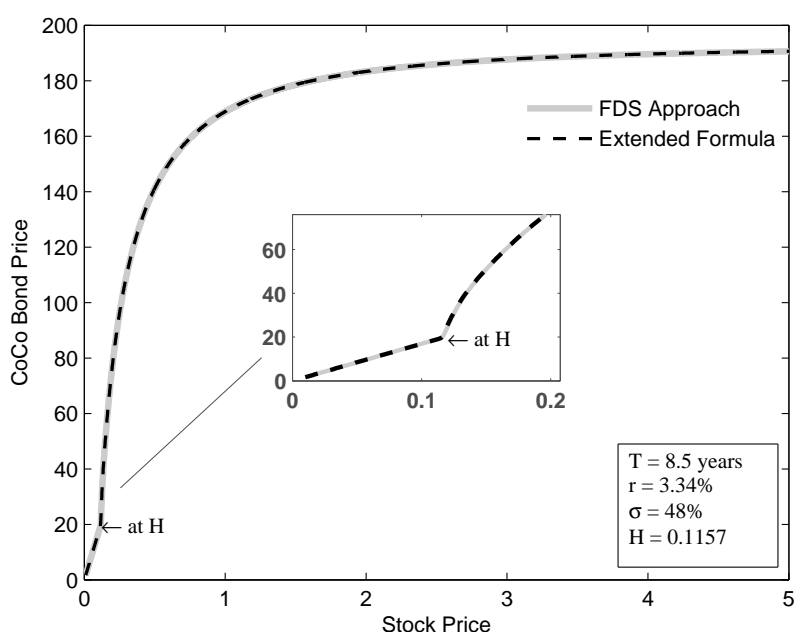
**Условие за свободна граница:** Нека  $\mathcal{U}$  е функция, която удовлетворява ЧДУ

$$h(x, \tau) = \begin{cases} \kappa H e^x, & \text{for } x \leq 0 \\ \min(B(\tau), V^c), & \text{for } x > 0 \end{cases}$$

$$u(x, \tau) = \min(h(x, \tau), \mathcal{U}(x, \tau))$$

Решение на тази задача намираме с помощта на схемата на Кранк и Никълсън и метода за линейни системи PSOR (*projected successive over-relaxation*).

Следващата фигура показва решението получено от този модел в сравнение с ревизираното аналитично решение. За целите на сравнение е използвана облигация КоКо без право на обратно изкупуване, плащаща 15% купон два пъти годишно.



Сравнение между примитивните модели при отсъствие на кол опции.

Във втората част на това изследване (параграф 6.3), към атрибутите на метода за оценяване на облигации Коко посочени по-горе, добавяме още един

- да работи в зависимост от кредитното състояние на емитента.

За тази цел се осланиа на модела за скок при фалит, където цената  $S$  на акцията следва процес от вида

$$dS_t = (r + \lambda\eta) S_t dt + \sigma S_t dW_t - \eta S_t dq_t.$$

При този модел, доминиращо е събитията “*фалит*” вместо събитията “*финансовото здраве на емитента е под критично ниво*” поради следните при-

чини. Първо, събитието *фалит* влече <sup>2</sup> събитието *финансовото здраве на емитента е под критично ниво* и второ считаме, че пазарните данни са по-добър индикатор за събитието *фалит* от колкото за събитието *финансовото здраве на емитента е под критично ниво*.

При тези обстоятелства, следвайки резултата от Глава 5, цената  $V$  на облигация КоКо като функция на  $S$  удовлетворява следното ЧДУ

$$V_t + \frac{\sigma^2 S^2}{2} V_{SS} + (r + \lambda\eta)SV_S - (r + \lambda)V + \lambda X = 0$$

където  $X$  означава цената на облигацията КоКо при настъпване на фалит. По-нататък, тъй като събитието *фалит* настъпва не по-рано от събитието *финансовото здраве на емитента е под критично ниво*, и от съображения за рационалност приемаме  $X = 0$ . Оттук следва, че уравнението за динамика на цената на облигация КоКо в контекста на скок при фалит е следното ЧДУ

$$V_t + \frac{\sigma^2 S^2}{2} V_{SS} + (r + \lambda\eta)SV_S - (r + \lambda)V = 0$$

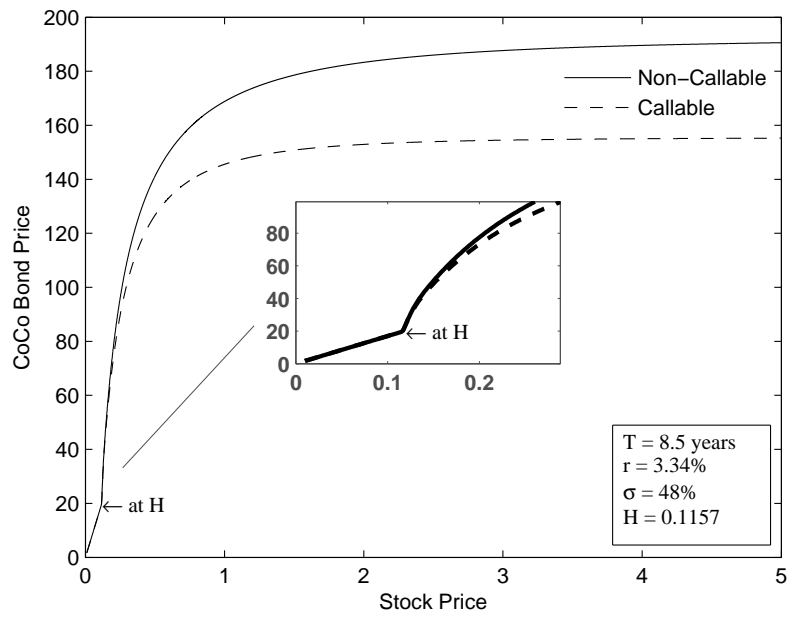
Следващите две фигури показват съответно ефекта от възможност за обратно изкупуване (без кредитен риск,  $\eta = 0$ ) и ефекта от различните нива на интензивността за фалит с обезценяване на акцията от 75%.

В първата фигура е използвана 9 годишна облигация КоКо с възможност за обратно изкупуване (от тип Бермуда) на цена 100 само на купонните дати (два пъти годишно) от периода 3 години след издаване и 3 години преди падежа.

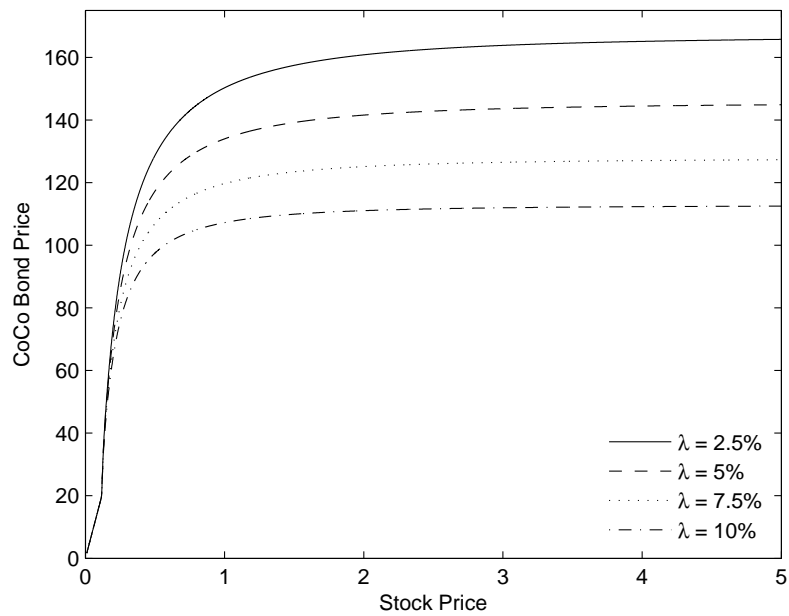
Във втората фигура е използвана облигация КоКо получена от контракта от първата фигура, но без възможност за обратно изкупуване.

---

<sup>2</sup>Казваме, че събитието А влече събитието В (В е следствие от А), ако всеки път, когато настъпва събитието А, настъпва и събитието В



Ефект на възможността за обратно изкупуване.



Ефект от нивата на интензитета за настъпване на фалит с обезценяване на акцията от  $\eta = 0.75$



В края на тази глава (параграф 6.4) са предоставени резултатите от още няколко числени експерименти, които демонстрират постигането на целите ни по отношение на задачата за оценяване на облигации КоКо.

## Глава 3

# Публикации и доклади на конференции и семинари по темата на дисертационния труд

[1] Milanov, Krasimir D., O. Kounchev, F. Fabozzi, Y. Kim, S. Rachev. “A Binomial-Tree Model for Convertible Bond Pricing.” *The Journal of Fixed Income*, Vol. 22, No. 3 (2013), pp. 79–94.

- Докладвана на *The Seminar on Mathematical Finance and Signal Processing*, 2 October 2012. Sofia, Bulgaria.

[2] Milanov, K. and O. Kounchev. “On the Binomial-Tree Approach to Convertible Bonds Pricing and Risk Assessment.” *Derivative Securities Pricing and Modelling (Contemporary Studies in Economic and Financial Analysis, Volume 94)*, Emerald Group Publishing Limited, pp.281–302. July 2012.

[3] Milanov K., O. Kounchev, and F. Fabozzi. “A Complete Model for Pricing CoCo Bonds.” Предоставена за печат в *Quantitative Finance* на 11 Oct 2016.

[4] Milanov K. and O. Kounchev. “CoCo Bonds Assessment.” SSRN, Working Paper, 2 October 2015.

- Докладвана на *New Trends in the Applications of Differential Equations in Sciences. Second International Conference*, 6-10 July 2015. Sofia, Bulgaria.

- Докладвана на *The Seminar on Mathematical Finance and Signal Processing*, 12 February 2016. Sofia, Bulgaria.

[5] Milanov K. and O. Kounchev. “Binomial Tree Model for Convertible Bond Pricing within Equity to Credit Risk Framework” SSRN, Working Paper, 18 June 2012.

# Библиография

- [1] Albul, B., D. Jaffee, and A. Tchisty. “Contingent Convertible Bonds and Capital Structure Decisions.” Working Paper, UC Berkeley, 2010.
- [2] Andersen, L. and D. Buffum. “Calibration and implementation of convertible bond models.” *Journal of Computational Finance*, Vol. 7, No. 2, 2004.
- [3] Ayache, E., P.A. Forsyth, and K. R. Vetzal. “Valuation of Convertible Bonds With Credit Risk.” *Journal of Derivatives*, 11 (2003), pp. 9–29.
- [4] Ayache, E. “The equity-to-credit paradigm.” *ITO33. Technical Report*, 2006.  
— . “The equity-to-credit paradigm” <http://www.risk.net/risk-magazine/advertisement/1506512/the-equity-credit-paradigm>, 2006.
- [5] Bardhan, I., A. Bergier, E. Durman, C. Dosembet, and I. Kani. “Valuing Convertible Bonds as Derivatives.” Goldman Sachs - Quantitative Strategies Research Notes, 1994.
- [6] Black, F. and M. Scholes. “The Pricing of Options and Corporate Liabilities.” *Journal of Political Economy*, Vol. 81, No. 3, 1973, pp.637–654.
- [7] Boyle, P. “Option valuation using a three-jump process.’ *International Options Journal*, Vol. 3, 1986
- [8] Brennan, M. and E. Schwartz. “Convertible Bonds: Valuation and Optimal Strategies for Call and Conversion.” *The Journal of Finance*, Vol. 32, No. 5, 1977.

- [9] Brennan, M. and E. Schwartz. “Finite Difference Methods and Jump Processes Arising in the Pricing of Contingent Claims: A Synthesis” *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 13, No. 3, 1978.
- [10] Brennan, M. and E. Schwartz. “Analyzing Convertible Bonds.” *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 15, No. 4, 1980.
- [11] Car, P., “Replicating Defaultable Bonds in Black Scholes with Jump To Default.” Bloomberg, L. P. – Quantitative Research, October 31, 2005.
- [12] Car, P., and V. Linetski. “A Jump to Default Extended CEV Model: An Application of Bessel Processes.” *Finance and Stochastics*, 2006
- [13] Connolly, K. *Pricing Convertible Bonds*. John Wiley & Sons Ltd, Chichester, 2001.
- [14] Cox, J., S. Ross, and M. Rubinstein. “Option Pricing: A Simplified Approach.” *Journal of Financial Economics*, 1979
- [15] Chan, Juin H., M. Joshi, R. Tang, C. Yang. “TRINOMIAL OR BINOMIAL: ACCELERATING AMERICAN PUT OPTION PRICE ON TREES.” Working Paper, SSRN, 2008
- [16] Cheridito, P., Z. Xu. “A reduced form CoCo model with deterministic conversion intensity.” Working paper, Princeton University, 2013.
- [17] Cheridito, P., Z. Xu. “A reduced form CoCo model with deterministic conversion intensity.” Working paper, Princeton University, 2014.
- [18] Clark, T.A., and M.I. Weinstein. “The Behavior of the Common Stock of Bankrupt Firms.” *Journal of Finance*, 38 (1983), pp. 489–504.
- [19] Davis, M., and F.R. Lischka. “Convertible Bonds with Market Risk and Credit Risk.” Working paper, Tokyo-Mitsubishi International, 1999.

- [20] De Spiegeleer, J., W. Schoutens. *The Handbook of Convertible Bonds: Pricing, Strategies and Risk Management*. John Wiley & Sons, 2011.
- [21] De Spiegeleer, J., W. Schoutens. “Pricing Contingent Convertibles: A Derivatives Approach.” *The Journal of Derivatives*, Vol. 20, No. 2 (2012), pp 27–36.
- . “Pricing Contingent Convertibles: A Derivatives Approach.” Working paper, SSRN, 2011.
- [22] De Spiegeleer, J., W. Schoutens, C. Van Hulle. *The Handbook of Hybrid Securities. Convertible Bonds, CoCo Bonds and Bail-In*. John Wiley & Sons, Chichester, 2014.
- [23] Fabozzi, F. and Rachev, Z. *Fat-Tailed and Skewed Asset Return Distributions. Implications for Risk Management, portfolio Selection, and Option Pricing*. John Wiley & Sons, 2005.
- [24] Feingold, B. *Beating the Indexes. Investing in Convertible Bonds to Improve Performance and Reduce Risk*. Pearson Education, Upper Saddle River, New Jersey, 2012.
- [25] Gatheral, J. *The Volatility Surface. A Practitioner’s Guide*. John Wiley & Sons, New Jersey, 2006.
- [26] Gallo, G. “Contingent Capital: Pricing and Risks.” Working paper, SSRN, 2011.
- [27] Glasserman, P., B. Nouri. “Contingent Capital With A Capital-Ratio Trigger.” Working paper, Columbia University, 2010.
- [28] Glasserman, P. Monte Carlo Methods in Financial Engineering. *Springer-Verlag*, New Yourk, 2003.
- [29] Grimwood, R. and S. Hodges. “The Valuation of Convertible Bonds: A Study of Alternative Pricing Models.” Working Paper, University of Warwick, 2002.

- [30] Heston, S. “A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options.” *The Review of Financial Studies*, Vol. 6, No. 2, pp. 327-343, 1993.
- [31] Ho, T.S.Y., and D.M. Pfeffer. “Convertible Bonds: Model, Value Attribution, and Analytics.” *Financial Analysts Journal*, 52 (September/October 1996), pp. 35–44.
- [32] Hull, J. *Options, Futures and Other Derivatives*, 8th ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 2011.
- [33] Hull, J. *Options, Futures and Other Derivatives*, 4th edition. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 2000.
- [34] Ingersoll, J. “A Contingent-Claims Valuation of Convertible Securities.” *Journal of Financial Economics*, Vol. 4, pp. 289-322, 1977.
- [35] Investment Strategy & Research Team, “Why insurers should buy convertibles under Solvency II.” Credit Suisse, Jun 2, 2015.
- [36] Jarrow, R., and S. Turnbull. “Pricing Derivatives on Financial Securities Subject to Credit Risk.” *The Journal of Finance*, 50 (1995), pp. 53–85.
- [37] Linetsky, V. “PRICING EQUITY DERIVATIVES SUBJECT TO BANKRUPTCY.” *Mathematical Finance*, 16 (2006), pp. 255–282.
- [38] Longstaff, F., and E. Schwartz. “Valuing American Options by Simulation: A Simple Least-Squares Approach.” *The Review of Financial Studies Spring*, Vol. 14, No. 1, (2001), pp. 113–147.
- [39] Merton, Robert C. “A Rational Theory of Option Pricing.” *Bell Journal of Economics and Management Science*, Spring 1973.
- [40] Merton, Robert C. “Option pricing when underlying stock returns are discontinuous.” *Journal of Financial Economics*, 3 (1976), pp. 125–144.

- [41] Milanov, Krasimir D., O. Kounchev, F. Fabozzi, Y. Kim, S. Rachev. “A Binomial-Tree Model for Convertible Bond Pricing.” *The Journal of Fixed Income*, Vol. 22, No. 3 (2013), pp. 79–94.
- [42] Muromachi, Y. “The Growing Recognition of Credit Risk in Corporate and Financial Bond Markets.” Working paper 126, NLI Research Institute, 1999.
- [43] Quantitative Research and Development, Equities Team, “OVCV Model Description.” Bloomberg, D. F., January 9, 2012, Version 1.62.
- [44] Saber, T., Jasper van Ingen, and Ivan Nikolov “Why convertible bonds could pay rich rewards.” NN Investment Partners, 2016.
- [45] Shaw, W. *Modelling Financial Derivatives with Mathematica. Mathematical Models and Benchmark Algorithms.* Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [46] Stefanini, F. *Investment Strategies of Hedge Funds.* John Wiley & Sons, Chichester, 2010.
- [47] Takahashi, A., T. Kobayashi, and N. Nakagawa. “Pricing Convertible Bonds with Default Risk.” *Journal of Fixed Income*, 11 (2001), pp. 20–29.
- [48] Tavella, D. *Quantitative Methods in Derivatives Pricing. An Introduction to Computational Finance.* John Wiley & Sons, New Jersey, 2002.
- [49] Teneberg, H. “Pricing Contingent Convertibles using an Equity Derivatives Jump Diffusion Approach.” Working paper, KTH Royal Institute of Technology, 2012.
- [50] Tsiveriotis, K., and C. Fernandes. “Valuing Convertible Bonds with Credit Risk.” *Journal of Fixed Income*, 8 (1998), pp. 95–102.
- [51] Wilkens, S., N. Bethke. “Contingent Convertible (“CoCo”) Bonds: A First Empirical Assessment of Selected Pricing Models.” Working paper, SSRN, 2013.

- [52] Wilmott, P. *DERIVATIVES. The Theory and Practice of Financial Engineering*. John Wiley & Sons, Chichester, 2000.
- [53] White, R. “Numerical Solutions to PDEs with Financial Applications.” OpenGamma Quantitative Research, 2013.
- [54] Yigitbasioglu, A. “Pricing Convertible Bonds with Interest Rate, Equity, Credit, FX and Volatility Risk.” Working paper, SSRN, 2002.
- [55] Zabolotnyuk, Y., R. Jones, and C. Veld. “An Empirical Comparison of Convertible Bond Valuation Models.” Working paper, SSRN, 2008
- [56] Stone, A., “Convertible Bonds: An Overlooked Income Source” <http://www.barrons.com/articles/convertible-bonds-an-overlooked-income-source-1467433752>, 2016
- [57] Barinka, A., “Convertible Securities Set for Comeback Amid Swinging Markets” <http://www.bloomberg.com/news/articles/2016-04-04/convertible-securities-poised-for-comeback-amid-swinging-markets>, 2016