РЕЦЕНЗИЯ

на дисертация на Любомир Владимиров Андреев
"Гранично поведение на инвариантни разстояния и метрики в комплексния анализ"
за присъждане на образователната и научна степен "доктор"
Рецензент: чл.-кор. проф. дмн Олег Мушкаров

1. Дисертацията на Любомир Андреев е посветена на актуални въпроси от теорията на инвариантните разстояния и метрики в комплексния анализ. Ще отбележа, че последните са фундаментални обекти в геометричната теория на функциите на много комплексни променливи, чието въвеждане и изучаване е предизвикано от липсата на аналог на класификационната теорема на Риман в едномерния комплексен анализ (още в началото на миналия век Поанкаре е отбелязал, че полидиска и кълбото в $\mathbb{C}^2$ не са бихоломорфно еквивалентни). Първите конкретни резултати, използващи инвариантни метрики са свързани с модела на Поанкаре на неевклидова геометрия, в който съществена роля играе метриката на Поанкаре, която е инвариантна при конформни изображения на единичния кръг. Обобщавайки лемата на Шварц-Пик в многомерния случай, Каратеодори (1927 г.) дефинира за всяка област в $\mathbb{C}^n$ т. нар. псевдоразстояние на Каратеодори, което е най-голямото разстояние в метриката на Поанкаре между образите на две точки от областта при всевъзможните холоморфни функции в единичния кръг. Скоро след това Ст. Бергман (1929 г.) въвежда нова инвариантна псевдометрика за области в $\mathbb{C}^2$, като за целта се използва пространството на интегруемите в квадрат холоморфни функции. Изключителен импулс за развитието на теорията се дължи на С. Кобаяши, който в 1967 г. въвежда инвариантна псевдометрика върху произволно комплексно многообразие, която се определя не чрез холоморфни функции, а чрез холоморфните дискове (холоморфни образи на единичния кръг в многообразието). По този начин бяха определени естествените граници, в които са разположени редица въведени по-късно инвариантни функции, разстояния и метрики, отразяващи важни аналитични и геометрични свойства на разглежданите многомерни области и комплексни многообразия.

Добре известно е, че в геометричната теория на функциите на много комплексни променливи границата на областта играе ключова роля, което обуславя изучаването на граничното поведение на инвариантни разстояния и псевдометрики. По същество тази тематика започва своето развитие през 1965 г. в известната статия на Хьормандер за съществуване на априорни L^2-оценки за $\overline{\partial}$-задачата. С тяхна помощ той намира точното гранично поведение на ядрото на Бергман на строго псевдоизпъкнала област, като важността на информацията от този характер може да се илюстрира с много примери. Тук ще спомена само знаменитата теорема на Феферман(1974 г.) за гладко продължаване на бихоломорфни изображения, даденото от Бедфорд и Пинчук описание на ограничените псевдоизпъкнали области от краен тип с некомпактни групи от автоморфизми, както и резултатите на Райфен за неподвижни точки на холоморфни изображения. Доказателствата на тези важни и трудни резултати са базирани върху точни оценки за ядрото на Бергман и метриките на Каратеодори и Кобаяши.

Получените резултати от кандидата са в стила на споменатите по-горе изследвания, като част от тях обобщават и уточняват скорошни резултати на водещи специалисти. По-точно, те са свързани с изследване на граничното поведение на псевдоразстоянието на Кобаяши и квазихиперболичното разстояние около C^1 гладки гранични точки и получаване на оценки отгоре за тези псевдоразстояния около Дини гладки гранични точки на области в $\mathbb{C}^n$.

Втората насока на изследване е свързана с намиране на асимптотиката на метриките на Каратеодори, Кобаяши и Бергман върху равнинни области, посредством разстоянието до границата при предположения за нейната $C^2, C^{1,\epsilon}, (\epsilon \in (0,1])$ и $C^{2,\epsilon}, (\epsilon \in (0,1))$ гладкост и определяне на тяхното гранично поведение около C^1 и Дини гладки гранични точки. Получена е и оценка отдолу на притискащата функция на равнинни области около Дини гладки гранични точки и асимптотична оценка на тази функция около C^1 гладки гранични точки. Тези изследвания се прилагат за доказване на непрекъсната продължимост на собствени холоморфни изображения между области с определени гранични свойства. Освен това, те се използвани наскоро от Е. Ф. Волф (2016 г.) за доказване на резултати от подобен характер в многомерния случай.

Сега ще се спра по-подробно на съдържанието на дисертацията, която е разделена на три глави.

В Глава 1 са изложени подробно някой важни понятия и теореми от многомерния комплексен анализ, които се използват в изследванията на кандидата. Основно внимание е отделено на най-важните инвариантни псевдоразстояния (Поанкаре, Каратеодори, Кобаяши, Бергман) и псевдометрики (Поанкаре, Каратеодори-Райфен, Кобаяши-Ройден, Бергман). Някои от техните свойства са придружени с доказателства, използващи важни идеи с широка приложимост в комплексния анализ. В тази глава са разгледани подробно функцията на Лемперт за области в $\mathbb{C}^n$ и квазихиперболичното разстояние за области в $\mathbb{R}^n$, които играят важна роля в следващите две глави на дисертацията. Последният параграф е посветен на така наречените равномерни области и техните геометрични и аналитични свойства.

Основната цел на Глава 2 е изучаването на граничното поведение на квазихиперболичното разстояние и псевдоразстоянието на Кобаяши около C^1 и Дини гладки гранични точки. Тези изследвания са мотивирани от класически резултати в тази насока (М. Абате, Фр. Форстнерич, Ж. П. Розе и др.), получени при по-висока регулярност на границата.

Първата задача за квазихиперболичното разстояние $h_G(x,y)$ е решена в термините на функцията

$$s_G(x,y) = 2\sinh^{-1}\frac{|x-y|}{2\sqrt{d_G(x)d_G(y)}},$$

където $d_G(x)$ е разстоянието от x до границата на област G в $\mathbb{R}^n$. Тази функция е инвариантна относно Мьобиусови трансформации и в случая, когато G е полупространство в $\mathbb{R}^n$ тя съвпада с квазихиперболичното разстояние. Най-важните резултати в този насока са Теорема 2.2.4 и Теорема 2.2.5. В първата теорема е доказано, че за C^1 гладка гранична точка a на собствена област G в $\mathbb{R}^n$ е в сила равенството

$$\lim_{x,y\to a}\frac{h_G(x,y)}{s_G(x,y)}=1.$$

Във втората теорема това равенство се уточнява, като се доказва, че за ограничени области то е вярно равномерно относно y.

Най-важните резултати за граничното поведение на псевдоразстоянието на Кобаяши около C^1 гладки гранични точки на области G в C^n са Теорема 2.3.2 и Теорема 2.3.3. В първата теорема е получена следната точна оценка за това поведение, като се използва квазихиперболичното разстояние $h_G(x,y)$ на областта G, разгледана като област в $\mathbb{R}^{2n}$:

$$\limsup_{z,w\to a}\frac{2k_G(z,w)}{h_G(z,w)}\le 1.$$

Във втората теорема се доказва, че за ограничена област G с C^1 гладка граница тази оценка е вярна равномерно относно $w\in G$ при $z\to\partial G$.

Трябва да се отбележи, че доказателствата на горните резултати са доста технични и използват оценки доказани в Глава 1 и първия параграф на Глава 2.

Изследванията в четвъртия параграф на Глава 2 са мотивирани от една известна оценка на Форстнерич и Розе на псевдоразстоянието на Кобаяши около $C^{1,\epsilon}$ гладка гранична точка, която се използва за доказване на съществуване на непрекъснато продължаване на собствени холоморфни изображения. Главният резултат е Теорема 2.4.3, в която е доказан следния усилен вариант на тази оценка при по-слабото предположение за Дини гладкост:

$$k_G(z,w)\le\log\Big(1+\frac{c|z-w|}{\sqrt{d_G(z)d_G(w)}}\Big).$$

Това неравенство е изпълнено за произволна константа $c>1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ и произволни точки z,w в съответна околност на Дини гладка гранична точка на област G в $\mathbb{C}^n$. Нещо повече, показано е, че аналогична оценка е в сила и за квазихиперболичното разстояние на области G в $\mathbb{R}^n$ при същото предположение за гладкост. Доказателството на тази теорема е много тежко (на повече от 10 страници) и на места изисква тънко аналитично чувство и сръчност в боравенето с различен тип оценки.

Като приложение на Теорема 2.4.3 в петия параграф на тази глава е получен аналог на теоремата на Форстнерич и Розе за непрекъснато продължаване на собствени холоморфни изображения. По-точно в Теорема 2.5.4 е доказано, че ако G е Дини гладка ограничена област в $\mathbb{C}^n$, върху която съществува отрицателна плурисубхармонична функция $\rho(z)\ge -d_G(z)$ и D е Дини гладка изпъкнала ограничена област, за която коплексното допирателно пространство във всяка гранична точка на D няма друга обща точка с границата, то всяко собствено холоморфно изображение между G и D се подължава до непрекъснато изображение между техните затворени обвивки.

Изследванията в Глава 3 са мотивирани от известни резултати на Ма (1992 г.) , Фу (1995 г.) и Дидрих-Фърнис (2015г.) за граничното поведение на псевдометриките на Каратеодори-Райфен, Кобаяши-Ройден и Бергман на ограничени псевдоизпъкнали области в $\mathbb{C}^n$ с C^3 и C^4 гладки граници, а също и от скорошни резултати на Николов за функцията на Лемперт и псевдоразстоянието на Каратеодори за области с $C^{2,\epsilon}$ гладки граници. Тяхната цел е изследването на граничното поведение на тези псевдометрики за ограничени области в $\mathbb{C}$ при по-слаби предположения за гладкост на техните граници.

Глава 3 е разделена на шест параграфа. В първия параграф са изложени някои необходими технически резултати за функцията s_G (Твърдения 3.1.2-3.1.4), които се използват за доказване на локализации на горните псевдометрики и псевдоразстояния за Дини гладки гранични точки, валидни само за области в $\mathbb{C}$ (Твърдения 3.1.6 и 3.1.7). В следващите три параграфа се изследва граничното поведение на псевдометриките на Каратеодори, Кобаяши и Бергман, като най-важните резултати са доказани в Теореми 3.2.1, 3.3.1 и 3.4.1. По- точно, ако a е C^2 , $C^{1,\epsilon}$ или $C^{2,\epsilon}$ гладка гранична точка на област G в $\mathbb{C}$, то за всяка от тези псевдометрики (по-долу означена с m_G) е в сила съответно:

- $\lim_{z\to a}(m_G(z) - \frac{1}{2d_G(z)}) = \frac{k(a)}{4}$, където $k(a)$ е кривината на границата на G в точката a;
- $m_G(z) = \frac{1}{2d_G(z)} + O(d_G(z)^{\epsilon-1})$ при $z \to a$;
- $m_G(z) = \frac{1}{2d_G(z)} + \frac{k(z_*)}{4} + O(d_G(z)^{\epsilon})$ при $z \to a$, където $|z - z_*| = d_G(z)$.

В Параграф 3.5 се изследва граничното поведение на псевдоразстоянията на Каратеодори, Кобаяши и Бергман (означени по-долу с p_G), като най-важните резултати са доказани в Теореми 3.5.1, 3.5.2, 3.5.4 и 3.5.5 :

- $\lim_{z,w\to a} 2p_G(z,w) - s_G(z,w) = 0$ за Дини гладка точка;
- $\lim_{z,w\to a} \frac{c_G(z,w)}{k_G(z,w)} = 1$ за C^1 гладка точка;
- $\lim_{z,w\to a} \frac{2p_G(z,w)}{s_G(z,w)} = 1$ за C^1 гладка точка, като в случая на ограничена област тази граница е в сила при $z \to a$ равномерно по $w \in G$.

В последния параграф на тази глава се изследва граничното поведение на притискащата функция S_G на Дини и C^1 гладки равнинни области G.

В Теорема 3.6.4 е доказано, че :

- $\limsup_{z\to a} \frac{1-S_G(z)}{d_G(z)} < \infty$ за Дини гладка точка;
- $\lim_{z\to a} \frac{1-S_G(z)}{d_G(z)^\alpha} = 0$ за C^1 гладка точка и всяко $\alpha < 1$.

В заключение ще отбележа, че за получаване на резултатите в дисертацията докторантът е преодолял редица трудности от идеен и технически характер и е използвал разнообразен арсенал от средства и резултати от съвременния комплексен и геометричен анализ. Считам, че неговите изследвания са много перспективни, тъй като поставят и редица интересни нови задачи. Като пример ще изтъкна задачата за уточняване на оценката в Теорема 2.3.2 и характеризиране на съответните екстремални области.

2. Най-важните резултати в дисертацията са включени в 3 статии, които са публикувани в реномираните международни математически списания Comp. Var. and Ellip. Eq. (IF-0.466), Ann. Mat. Pura Appl. (IF-0.861) и Int. J. Math. (IF-0.529). Две от статиите са съвместни с научния ръководител, а другата е съвместна с научния ръководител и М. Трибула. Считам, че приносът на дисертанта в трите статии е равностоен на останалите автори. Трябва да отбележа, че резултатите на дисертанта са докладвани на Докторанската конференция по математика и информатика на ИМИ, 2015 г., Общия семинар на секция АГТ, 2015 г. и 2016 г., Студентската конференция по математика на ФМИ, СУ, 2016 г. и на престижната международна конференция "Invariant Metrics and Squeezing Functions and Mapping Problems, март 2017 г., Осло, Норвегия. Дисертантът е представил информация за четири цитирания на горните статии, като три от тях са в списания с висок импакт-фактор и едно в статия в Arxiv.

3. Единствените ми критични бележка по дисертацията са редакционни:

а). В Твърдение 2.1.6 не е ясно какво е Y.

б). При доказателството на неравенството на стр. 100, ред. 4 трябва да се отбележи, че може да се счита, че $x \leq y$. Иначе неравенството не е вярно.

в). Доказателството на Твърдение 3.1.1 е дълго. То следва веднага от очевидното неравенство

$$|\frac{1+\sqrt{1+a}}{1+\sqrt{1+b}} - 1| = \frac{|a-b|}{(\sqrt{1+a}+\sqrt{1+b})(1+\sqrt{1+b})} < \frac{|a-b|}{b}$$

при $a, b > 0$.

4. Авторефератът и авторската справка правилно отразяват основните резултати и научните приносите на дисертацията.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ. Всичко казано по-горе показва, че представеният дисертационният труд отговаря напълно на критериите и показателите за придобиването на научната и образователната степен "доктор"съгласно ЗРАСРБ, неговия Правилник и Правилниците за условията и реда за придобиване на научни степени и за заемане на академични длъжности в БАН и ИМИ. Това ми дават основание убедено да препоръчам на членовете на почитаемото Научно Жури да гласуват "за"присъждането на образователната и научна степен "Доктор"на Любомир Владимиров Андреев.

09. 05. 2017 г. Подпис:

(чл.-кор. Олег Мушкаров)