Р Е Ц Е Н З И Я

на проф. дмн Петър Русев на дисертационния труд **Гранично поведение на инвариатни разстояния и метрики в комплексния анализ** с автор **Любомир Андреев**, представена с оглед присъждането на образователната и научна степен "доктор" в професионално направление 4.5. Математика по научната специалност 01.01.04. Математически анализ.

1. Дисертационният труд на Любомир Андреев е в обем от 179 страници, от които 18 стр. увод, три глави обхващащи 145 стр. , 7 стр. библиография съдържаща 81 заглавия, 2 стр. описание на публикациите и докладите на дисертанта свързани с труда му и авторска справка на приносите му.

2. Дисертационният труд е в актуална област на комплексния анализ, за която, по мое мнение, има достатъчно основание да се нарича холоморфна геометрия. По-конкретно, той е посветен, както това е заявено в заглавието му и успешно реализирано в него, на граничните свойства на разстояния и метрики, дефинирани в и върху области от пространствата $\mathbb{C}^n, n \geq 1$, които са инвариантни при бихоломорфни изображения на такива области

3. Необичайно големия по обем увод е както историческо въведение в областта на дисертационния труд, така и обзор на инвариантните разстояния и метрики, които са били обект на изследванията на не малък брой автори още от края на по-миналия век, продължаващи с нестихващ интензитет и в наши дни. За това свидетелствува и фактът, че повече от една четвърт от трудовете цитирани от дисертанта са публикуване след 2000-та година. Успешно е ангажирана и съвременната тендеция за "разделяне" на изследваните бихоломорфни инварианти на разстояния и метрики. Безспорно това е наложено от утвърдилата се вече "технология" в анализа върху диференцируеми и в частност комплексни многообразия да се привличат гладки векторни полета върху тях.

4. Първата глава, в обем от около 60 страници, е въведение в тематиката на дисертационния труд. Тя може успешно да улесни първоначалното запознаване с бихоломорфните инварианти, които се третират в него.

5. Втората и третата глава, с общ обем от около 65 страници, съдържат резултатите на дисертанта за граничното поведение на псевдоразстоянията и псевдометриките, които са обект на изследвания през последните няколко десетилетия. По-конкретно, усилията на дисертанта са довели до прецизиране на граничното поведение респ. асимптотиката на квазихиперболичното разстояние на Кобаяши, на метриките на Каратеодори е Кобаяши, на метриката и ядрото на Бергман в области от $\mathbb{C}^n, n \geq 1$, при възможно минимални изисквания за локална гладкост на границите им. За целта е привлечено и класическото условие на У. Дини за локална валидност на представянето на измерими функции с ред респ. интеграл на Фурие (А. Н. Колмогоровр С. В. Фомин, Элементы теории функций и функционального анализа, Москва 1976, стр. 409, 421)

Уместно е да се изтъкне, че началото на изследванията на граничните свойства на бихоломорфни инварианти е поставено от Ст. Бергман с публикацията му цитирана под № 9 в библиографията към дисертационния труд, но едно от първите съществени приложения на резултати от такива изследвания и по-специално върху функцията на Бергман, бе дадено от Ч. Феферман в цитираната под № 24 негова публикация почти 40 години след тази под № 9 и за приносите в която авторът ѝ бе удостоен с Филдсов медал.

Особено висока оценка заслужава Твърдение 2.4.3, чието доказателсвото е коствало не малки усилия и технически умения на дисертанта, за което е достатъчно да се изтъкне, че то обхваща цели 12 страници от труда му. Впечатляващи са и асимптотичните формули изразяващи Твърдение 3.2.1, Твърдение 3.4.1, както и Забележка 3.4.4, в които фигурира кривината на границата на областта от комплексната равнина, за която област те се отнасят. Макар и формално, но може би не съвсем, има аналогия с резултат на Х. Вайл, потвърждаващ хипотеза на Х. Лоренц, съгласно който $N(\lambda) \sim \dfrac{|\Omega|}{2\pi}\lambda,\ \lambda \to \infty$, където $N(\lambda)$ е броят на собствените стойности на оператора на Лаплас за гранична задача за ограничена плоска област, които не надминават λ, а $|\Omega|$ е лицето на областта (M. Kac, Can one hear the shape of a dream?, Amer. Math. Monthly (Slought Memorial paper, № 11), 73 (1966), № 4, Part 2, 1 - 23).

6. Критичните ми бележки се отнасят първо до езиковото оформление на дисерт. труд. По мое мнение, въобще в изложението на научен труд, трябва да се избягва употребата на първо лице както в единствено, така и в множествено число. Същото се отнася и до употребата на бъдеще време. Позволих си в този дух известна редакция на труда на Любомир, но негово право е да я приеме или не.

Очевидно и обяснимо е влиянието на руския език. Така напр., вместо „дефиниция“ се употребява „определение“, което е термин от граматиката, но не и в математиката. Превод от руски език са също така думите „затваряне“ и „накритие“. Първото от тях е отглаголно съществително, което, както и всяко такова, изразява действието на глагола, от което е образувано, но не и резултата от него. Все пак, то би могло да замени общоприетото понятие „затворена обвивка“, когато се отнася до подмножество на топологично пространство, но това може да стане в резултат на съответен консенсус.

В българския език няма „накритие“, както и „накривам“ и “накриващ“, които са употребени в Увода на дисерт. труд. От текста обаче не става ясно какъв смисъл влага в тях авторът му, възможно е първата от тях да я счита за синоним на „покритие“. Но в публикациите по математика на руски език се употребява както понятието „покрытие“, така и „накрытие“ и за всяко от тях има дефиниция в съответен контекст.

В увода на дисерт. труд авторът му употребява понятието „топологична тривиалност“ без да го дефинира. Вероятно той има предвид, че всяка регулярна адносвързана област от комплексната равнина, т.е. границата ѝ има повече от една точка, е хомеоморфна с единичния кръг?

Известно недоумение предизвиква твърдение 3.3.1. Така както е записано равенството, което го изразява, има вид на асимптотична формула, но това е само привидно, тъй като О-събираемото има по-нисък ръст когато $z \to a$, отколкото този на главния член. Това равенство става асимптотична формула ако $1-\varepsilon$ може да се замени с $1+\varepsilon$, или ако се запише във вида $2m_G(z)d_G(z) = 1 + O(d_G(z)^\varepsilon)$.

7. Както е добре известно, К. Каратеодори предложи компактно разширение на регулярните едносвързани подобласти на комплексната равнина с оглед хомеоморфно продължение на конформните им изображения в единичние кръг. Вероятно представлява интерес граничното поведение на псевдоразстоянията дефинирани в области компактифицирани по Каратеодори.

Както А. Поанкаре е казал, Б. Риман ни научи как се прави комплексен анализ върху свързаните комплексно-едномерни многообразия, т.е. върху римановите повърхнини, и най-вече каква е ролята на топологията на такива многообразия, когато те са компактни. Изглежда естествен въпросът дали метричните бихоломорфни инварианти могат да се „отглеждат“ и върху риманови повърхнини и въобще струват ли си евентуалните усилия за такова обобщение на класическата им теория.

8. Заключение. От направения макар и кратък преглед на дисертационния труд на Любомир Андреев преди всичко следва, че той удовлетворява изискванията за получаването на образователната и научна степен „доктор“. Наистина, безспорно е че авторът му е навлязъл в една актуална област, каквато е теорията на бихоломорфно инвариантните разстояния и метрики, до степен на творчески възможности довели до получаването на съдържателни резултати. Като изключа изразените резерви, приемам постиженията му отразени в авторската му справка. Без съмнение е и равностойното му участие в публикациите по дисертационния му труд намерили място в реномирани издания. Що се отнася до аовтореферата, ако той се възпроизведе с нормален шрифт, напр. 12pt, би добил по-скоро формата на мини-дисертация.

Всичко казано до тук ми дава достатъчно основание с пълна убеденост да препоръчам на Любомир Андреев да се присъди образователната и научна степен „доктор“.

София, 09.05.2017 Рецензент:

(Проф. дмн П. Русев)